UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E SISTEMAS

MARTA RAQUEL ARAUJO PEREIRA

MÉTODOS NUMÉRICO E ANALÍTICO PARA O PROBLEMA DE DIFUSÃO NÃO LINEAR FRACIONÁRIO ASSOCIADOS AOS FENÔMENOS DE CONVECÇÃO E REAÇÃO.

SÃO LUÍS
2018

MARTA RAQUEL ARAUJO PEREIRA

MÉTODOS NUMÉRICO E ANALÍTICO PARA O PROBLEMA DE DIFUSÃO NÃO LINEAR FRACIONÁRIO ASSOCIADOS AOS FENÔMENOS DE CONVECÇÃO E REAÇÃO.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Computação e Sistemas da Universidade Estadual do Maranhão, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Computação e Sistemas.

Orientador: Prof. Msc. Henrique Mariano Costa do Amaral.
Coorientador: Prof. Dr. Felix Silva Costa.

SÃO LUÍS
2018

Pereira, Marta Raquel Araujo.

Métodos numéricos e analítico para o problema de difusão não linear fracionário associados aos fenômenos de convecção e reação / Marta Raquel Araujo Pereira. – São Luís, 2018.

76

Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia da Computação e Sistemas, Universidade Estadual do Maranhão, 2018.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Mariano Costa do Amaral

Coorientador: Prof. Dr. Felix Silva Costa.

1. Difusão. 2. Cálculo fracionário. 3. Difusão fracionária. 4. Reação. 5. Convecção. I. Título.

CDU 519.6

MÉTODOS NUMÉRICO E ANALÍTICO PARA O PROBLEMA DE DIFUSÃO NÃO LINEAR FRACIONÁRIO ASSOCIADOS AOS FENÔMENOS DE CONVECÇÃO E REAÇÃO.

MARTA RAQUEL ARAUJO PEREIRA

APROVADO EM: ____ de Abril de 2018.

MsC. Prof. Henrique Mariano Costa do Amaral

(Orientador)

Prof. Dr. Felix Silva Costa

(Coorientador)

Prof. Dr. Carlos Alberto Rios Brito Junior

(Membro da Banca Examinadora)

Prof. Dr.Lourival Matos de Sousa Filho

(Membro da Banca Examinadora)

Ao meu avô, Árias Martins Araujo (*in memorian*)
que sempre acreditou em mim, maior incentivador.
Dedico.

"Mesmo que a vida pareça difícil, há sempre algo que você pode fazer para ter sucesso nela.".

Stephen Hawking

Agradecimentos

Independentemente do que vai acontecer precisamos agradecer, aqueles que contribuíram diretamente ou indiretamente para a conclusão deste trabalho. Primeiramente à DEUS pela vida e por permitir de chegasse até aqui.

Aos meus orientadores: Prof. Dr. Felix Silva Costa por ter aceitado o grande desafio de me orientar, por todo conhecimento repassado, paciência, atenção, disposição, compreensão, chamadas de atenção, palavras de incentivo; ao Prof. Msc. Henrique Mariano Costa do Amaral, pela excelente recepção, contribuição no trabalho, sinceridade, paciência e compreensão.

À minha família, meus pais (Rosangela e Sebastião) pelo amor e apoio, demonstrados nos momentos mais difíceis, ao meu avô (Àrias Martins) que foi o meu maior incentivador, à minha avó (Martinha) pelo enorme amor e carinho, às minhas irmãs (Thais e Ariana) pelo carinho e alegria.

Ao meu melhor amigo (Guilherme Bonfim) por não ter deixado eu desistir e pela grande ajuda nos momentos de dificuldades. Aos meus professores do Departamento de Matemática e Informática (DEMATI) em especial (Prof. Msc. Carlos Cesar, Dr. Prof. João Coelho, Dr. Prof. Luís Carlos, Dr. Prof. Marão), pelo apoio e incentivo.

Aos professores e funcionários do PECS em especial (Prof. Dr. Lucio Flavio, Prof. Dr. Lourival Filho, Karoline, Sara), pelas críticas, gentileza, consideração e principalmente à paciência.

À minha turma PECS 2015 (Ana, Cristovam, Guilherme, Eduardo, Jhon Selmo, Rildenir), pelo companheirismo e amizade.

À minha galera linda (Beatriz, David, Dayane, Dermison, Igor, Elzenir, Joaniz, João Paulo, Lucinalva, Mariana, Maria, Wellyandra, Wellyanna, Luisa, Thiago, Sandra) que permaneceram ao meu lado, compreendendo à minha ausência em determinados momentos.

À Universidade Estadual do Maranhão - UEMA, ao Programa de Pós Graduação em Engenharia da Computação e Sistemas, pela contribuição ao meu desenvolvimento pessoal e profissional.

À banca examinadora por ter aceitado o convite.

Enfim, o meu muito Obrigada a todos!

Resumo

Os processos difusivos não lineares vêm sendo investigados por diversos pesquisadores, com o auxílio de ferramentas analíticas e numéricas. Em decorrência desse fator, a difusão tornou-se alvo de pesquisas e reflexões. Dessa forma, este trabalho se caracteriza pela apresentação de um problema de difusão fracionária não linear, associado aos fenômenos de reação e convecção, cujo objetivo foi encontrar soluções do tipo ondas viajantes. Para tal, utilizou-se os métodos numéricos, analíticos e computacional. Em decorrência, foi realizado um algoritmo no MATLAB, mostrando o comportamento anômalo através dos gráficos, com os fenômenos de difusão fracionária, difusão fracionária com reação e difusão fracionária com convecção. Portanto, foi realizado um estudo sobre o cálculo fracionário expondo algumas definições, teoremas, propriedades e aplicações. Nesse ínterim, verificou-se que o cálculo de ordem arbitrária apresenta uma descrição mais fina dos fenômenos naturais e caracteriza-se pela obtenção de uma quantidade maior de informações atreladas aos operadores não locais, denominado efeito de memória. Por fim, analisou-se a difusão fracionária anômala em um meio poroso, sendo ela baseada nas equações diferenciais fracionárias e abordou-se acerca de dois problemas difusão fracionária não linear temporal, espacial, no qual foi apresentado seus métodos analíticos e numéricos. Assim sendo, sabe-se que a equação de difusão fracionária engloba muitas aplicações, por exemplo, infiltração, transferência de calor, combustão, reação química, dinâmica de fluidos, física de plasma, solos, drenagem de espuma, crescimento de cristais e genética de populações biológicas.

Palavras Chaves: difusão anômala, cálculo fracionário, difusão fracionária, meios porosos, reação, convecção.

Abstract

Nonlinear diffusive processes have been investigated by several researchers, with the aid of analytical and numerical tools. As a result of this factor, the diffusion became the target of researches and reflections. Thus, this work is characterized by the presentation of a problem of nonlinear fractional diffusion, associated to the phenomena of reaction and convection, whose objective was to find solutions of the type traveling waves. For this, numerical, analytical and computational methods were used. As a result, an algorithm was performed in MATLAB, showing the anomalous behavior through the graphs, with the phenomena of fractional diffusion, fractional diffusion with reaction and fractional diffusion with convection. Therefore, a study was carried out on the fractional calculation exposing some definitions, theorems, properties and applications. In the meantime, it was verified that the calculation of arbitrary order presents a finer description of natural phenomena and is characterized by obtaining a greater amount of information linked to non-local operators, called memory effect. Finally, we analyzed the anomalous fractional diffusion in a porous medium, being based on the fractional differential equations and it was approached about two spatial non-linear fractional diffusion problems, in which its analytical and numerical methods were presented. Thus, it is known that the fractional diffusion equation encompasses many applications, for example, infiltration, heat transfer, combustion, chemical reaction, fluid dynamics, plasma physics, soils, foam drainage, crystal growth and genetics of populations.

Keywords: anomalous diffusion, fractional calculation, fractional diffusion, porous medium, reaction, convection.

Lista de figuras

Lista de Símbolos

I^{α}_{a+}	Integral de Riemann-Liouville à Direita.
I^{α}_{b-}	Integral de Riemann-Liouville à Esquerda.
D^{α}_{a+}	Derivada de Riemann-Liouville à Direita.
D^{α}_{b-}	Derivada de Riemann-Liouville à Esquerda.
${}^{c}D^{\alpha}_{a+}$	Derivada de Caputo à Direita.
${}^{c}D^{\alpha}_{b-}$	Derivada de Caputo à Esquerda.
${}_{x}W^{\alpha}_{\infty}y$	Integral de Weyl.
$xD^{\alpha}_{\infty}y$	Derivada de Weyl.
$D^{\alpha}_{x}y(x)$	Derivada de Riesz.
xD^{α}_{θ}	Derivada de Riesz-Feller.
$D^{\alpha}y(x)$	Derivada de Grünwald-Letinikov.
$\Gamma(.)$	Função Gamma de Euller.
$u(x,t)$	Concentração de Substância.
$F^{(a,b)}_{\beta}$	Operador Erdélyi-Kober.
$AC^{n}[a,b]$	Intervalo de Funções no Espaço Complexo.
$L^{r}_{a,b,c}$	Discretização do Operador Erdélyi-Kober pela Regra Retangular.
$L^{t}_{a,b,c}$	Discretização do Operador Erdélyi-Kober pela Regra Trapezoidal.
$B(s_{i+1}; a+1, b)$	Função Beta Incompleto.

Sumário

1 Introdução

O processo difusivo se caracteriza por dispersar, expandir ou se espalhar e ocorre a partir dos movimentos aleatórios das partículas. Tal processo, se desenvolve partindo de um meio com maior concentração, para um com menor concentração. Nesse contexto, a movimentação das partículas são independentes e não colidem entre si.

De certo, sabe-se que a difusão é aplicada em diversas áreas, tais como na física, química, biologia e engenharia. Nesse caso, pode-se destacar como exemplo: O odor de um perfume que se espalha em um espaço; infiltração de água no solo; purificação para gases em filtros; fumaça se espalhando pelo ar, dentre outros. (PEDRON, 2015).

Em relação a difusão, consta que vários pesquisadores fizeram estudos sobre este processo, dentre eles destacam-se a Joseph Fourrier (1768-1830), Thomas Graham (1805-1869), Adolph Eugen Fick (1852-1937) e Lewis Fry Richardson (1879-1830). Em suma, a maioria dos processos difusivos obedecem a chamada lei de Fick descrita da seguinte forma:

$$J = -D\nabla\rho.$$

Conforme pode-se observar, ρ é a densidade do elemento que se difunde, ∇ é a taxa de variação espacial, J é a densidade de corrente (quantidade de substância que atravessa uma unidade de área normal à direção do fluxo, por unidade de tempo), D é o coeficiente de difusão que depende das propriedades do meio (sem equilíbrio térmico ou químico), ele nos informa a velocidade com que a quantidade medida por ρ se difunde em regiões com altas concentrações, para regiões com baixas concentrações.

Em decorrência desse processo, segundo consta na lei de Fick, o sinal combinado diz que a difusão tende a ocorrer da região de maior concentração, para uma com menor concentração (PEDRON, 2015; GONZÁLEZ, 2006). Nesse caso, a difusão pode ser classificada em linear, não linear ou anômala.(falar sobre a difusão linear). O estudo da difusão anômala, se deu através de pesquisas acerca da difusão turbulenta, descrita por Lewis Fry Richardson em seu artigo (Lewis Fry Richardson: scientist, visionary and pacifist). (PEDRON, 2015; GONZÁLEZ, 2006).

A difusão é considerada anômala quando houver desvios, isto é, quando o crescimento da variância é não linear. Esta, pode ser aplicada em diversos campos, tais como, difusão em plasma, transporte de um líquido em um meio poroso, análise de histogramas de batidas do coração de um indivíduo, dentre outros (PEDRON, 2015; GONZÁLEZ, 2006).

Portanto, em virtude de sua imensa aplicabilidade na natureza, a difusão não linear vem sendo estudada cada vez mais pelos pesquisadores. Destarte, este trabalho realiza um estudo sobre o processo de difusão não linear, em um meio poroso. Historicamente a equação da difusão em um meio poroso foi introduzida por J. Boussinesq que criou uma versão não linear da equação do calor. Logo, compreende-se então, que a equação em um meio poroso, tem aplicabilidade em diversos campos, como no fluxo de água subterrâneo, na transferência de calor não linear, no fluxo de gás através de um meio poroso, dentre outros. (VÁZQUEZ 2008).

Para tal, com o intuito de obter uma solução mais precisa para esses fenômenos utiliza-se o cálculo fracionário ou cálculo de ordem não inteira, em que os operadores não locais podem ser empregados para levar em consideração, por exemplo, as correlações especias.

No que diz respeito ao cálculo fracionário ou cálculo de ordem não inteira, salienta-se que surgiu de uma troca de cartas entre dois brilhantes estudiosos L'Hospital e Leibnz. Essa correspondência envolveu o seguinte questionamento, qual o significado da derivada de ordem n de uma função y, $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ quando $n = 1/2$.

A troca de correspondências aconteceu em 30 de setembro de 1965. Atualmente essa data marca a origem do cálculo fracionário. Essa troca de mensagens, foi somada a contribuição dos mais renomados matemáticos como Euler, Lagrange, Fourrier, Abel Heaviside, Liouville, entre outros (CAMARGO, 2009).

Sendo assim, vale ressaltar que a vantagem da utilização do cálculo fracionário é que ele oferece uma descrição mais fina de fenômenos naturais que aquela feita a partir do cálculo usual, tendo em vista que as derivadas fracionárias possuem uma descrição associada ao efeito de memória e propriedades hereditárias de diversos materiais.

Contudo, além das vantagens já descritas, nota-se que o cálculo de ordem fracionária possui diversas definições aumentando o grau de dificuldade, em que as mais comuns são: Riemann-Liouville, Caputo, Grunwald-Letinikov, Weyl e Riesz-Feller, sendo elas aplicadas no presente trabalho.

Dessa maneira, o cálculo fracionário foi utilizado como ferramenta para descrever a equação de difusão fracionária, sendo a melhor forma de mostrar comportamentos que estão associados aos efeitos de memória e distância através dos operadores fracionários, citando V.D. Djordjevic e T.M. Atanackovic (DJORDJEVIC; ATANACKOVIC, 2008), que apresenta um modelo de equação de difusão fracionária temporal, H. Yanghong apresenta um modelo de equação de difusão fracionária espacial baseada nos laplacianos fracionários (HUANG, 2014) e F.S. Costa et al.(COSTA, 2015) que realizou uma análise da equação de difusão fracionária temporal-espacial.

Além disso foi trabalhado com soluções numéricas, utilizando a derivada fracionária (Riemann-Liouville ou Caputo), conhecida como operador integral fracionária Erdèlyi-Kober (E-K). Assim, foi feito a discretização, utilizando as regras de quadratura, retangular, ponto médio e trapezoidal (PLOCINICZAK; OKRASINKA). Usando as soluções de similaridade, para equação de difusão fracionária não linear, sendo que a solução numérica aplicada foi as diferenças finitas.(PLOCINICZAK; SOBIEZEK)

Durante o estudo do comportamento anômalo associado aos fenômenos de reação e convecção espacial – temporal, foi utilizado soluções do tipo ondas viajantes e o método de redução, apresentando uma solução explícita para a equação de difusão fracionária, a qual é uma generalização dada por V.D. Djordjevic e T.M. Atanackovic (DJORDJEVIC; ATANACKOVIC, 2008). A equação de difusão fracionária com convecção que é uma generalização encontrada por F.S. Costa e M.R.A. Pereira (COSTA; PEREIRA,2017) e equação de difusão fracionária com reação dada por F.S.Costa et tal (COSTA, 2016).

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

- Apresentar um estudo sistemático sobre o fenômeno de difusão com reação e convecção.
- Investigar o modelo matemático associados ao cálculo fracionário.

1.1.2 Específico

- Modelar os problemas de difusão no meio poroso, utilizando como ferramentas o cálculo fracionário e programas computacionais, para obter melhores descrição do fenômeno.

1.2 Organização da dissertação

O trabalho está organizado em capítulos que abordam um contexto histórico sobre o cálculo fracionário e o processo de difusão não linear, em que tem-se uma melhor descrição para os modelos difusão fracionária com reação e convecção utilizando novas ferramentas (matemáticas, numéricas e computacionais).

No Capítulo 2 apresentou-se um campo utilizado como modelagem da equação de difusão fracionária, bem como, destacou-se o cálculo fracionário. Para tal, foi realizado uma breve introdução ressaltando como surgiu os principais pesquisadores, definições, exemplos e propriedades das diversas maneiras de se introduzir as derivadas de ordem não inteiras. Nesse meio, destacou-se as principais derivadas fracionárias como: Riemann-Liouville, Caputo, Grunwald-Letinikov, Weyl e Riesz-Feller. Assim sendo, procurou-se efetivar o esclarecimento sobre as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville como as mais difundidas, a de Caputo seguindo a ideia de mais conveniente para problemas envolvendo condições iniciais, bem como, destaca-se as relações entre elas, apresentando também, a Riesz- Feller para uma interpretação estocástica em termos de processo conhecido como de Lévy e de Grunwald-Letinikov aplicadas em diversas áreas da engenharia.

No Capítulo 3 realizou-se um estudo sobre a difusão fracionária. Nesse contexto, dialogou-se sobre a origem do processo de difusão tanto linear, quanto não linear, mostrando os principais estudiosos desse processo. Foi dialogado também, sobre a difusão anômala e suas principais aplicações. Após, mostrou-se a definição da equação no meio poroso, como começou e quais as suas aplicabilidades. Além do mais, realizou-se a definição da equação de difusão fracionária não linear, espacial, temporal, cujo objetivo foi descrever como funciona o comportamento anômalo associado aos efeitos de memória e distância, descritos pelas derivadas fracionárias. Nesse âmbito, apresentou-se, as soluções analíticas e numéricas, considerando a derivada fracionária, no tempo e na equação de difusão fracionária espacial. Portanto, observou-se também, os efeitos de distância, na equação de difusão fracionária em um meio poroso, usando o laplaciano fracionário, baseado nos potenciais que foram definidas por Marcel Riesz.

No Capítulo 4 analisou-se uma equação de difusão fracionária em um meio poroso associado aos fenômenos de reação e convecção. Dessa forma, mostrou-se o modelo fracionário usado para descrever a equação de difusão, explicando o uso das derivadas fracionárias, procurou-se por soluções do tipo ondas viajantes, em que foi encontrado uma equação integral através de soluções de ondas viajantes com propagação finita, denominadas frentes de ondas. Enfim, apresentou-se soluções explícitas para alguns casos particulares, como os métodos computacionais e traçou-se gráficos para ilustrar o comportamento anômalo.

2

Cálculo Fracionário

Em geral ao tratar da derivada de uma função associa-se a ordem de derivação, um número inteiro não negativo. Uma pergunta inusitada surge quando essa ordem se origina de um número qualquer. Essa questão se sucedeu a partir das correspondências entre L'Hospital e Leibnz. Nesse sentido, L'Hospital fez a seguinte indagação para Leibniz, qual seria o significado de "$D^n y = \frac{d^n y}{dx^n}$ quando n fosse igual a $\frac{1}{2}$".

Sem certeza e com tom profético Leibniz afirmou: "Segue $D^{\frac{1}{2}}$ que será igual a $x\sqrt{dx : x}$". Este ainda é um aparente paradoxo, em que um dia importantes aplicações serão obtidas. Tal diálogo se sucedeu em 30 de setembro de 1695, ano que ocorreu o nascimento do cálculo fracionário (CAMARGO; DE OLIVEIRA, 2015).

A partir dessa ideia gerada por Leibniz e L 'Hopital, houve a insurgência de grandes matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento do cálculo fracionário. No entanto, essa contribuição transcorreu de forma desordenada. Nesse meio, pode-se citar alguns matemáticos que tiveram colaborações importantes: L.Euler (1730), J. Lagrange (1772), P. S. Laplace (1812), S. F. Lacroix (1819), J. B. J. Fourier (1822), N. H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-1867), A.K. Grünwald (1867-1872), A. V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P. A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside(1892-1912), S. Pincherle (1902), G. H. Hardy e J. E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. Lvy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis(1924-1936), E. L. Post (1930), A. Zygmund (1935-1945), E. R. Love (1938-1996), A. Erdelyi (1939-1965), H. Kober (1940), D. V. Widder (1941), M. Riesz (1949), W. Feller (1952), M. Caputo (1969), T. J. Osler (1970), M. Shinbrot (1971), S. G. Samko (1979), A. A. Kilbas e O.I. Marichev (1987), A.Carpinteri e F.Mainardi, (1997), R.Hilfer (2000), G.Loverro (2004); J.Sabatier, O.P. Agrawal e J. A. T. Machado (2007), E.Capelas (2007); V.V.Uchaikin, (2009) (MACHADO et al., 2011).

Portanto, assim como o cálculo de ordem inteira, o cálculo de ordem arbitrária, trata da investigação e aplicação de integrais e derivadas de ordens arbitrárias em tecnologias, ciências, engenharias, economia, teoria de controle, física, química, processo estocásticos, dentre outras (CAMARGO; DE OLIVEIRA, 2015).

O cálculo fracionário tornou-se uma área da matemática que oferece uma descrição mais fina dos fenômenos naturais, que aquela feita a partir do cálculo de ordem inteira. Pois, as derivadas fracionárias possuem uma ótima descrição para efeito de memória e propriedades hereditárias de diversos materiais (CAMARGO; DE OLIVEIRA, 2015).

Essa descrição mais fina pode ser vista no problema da tautócrona ou isócrona, formulada por Abel. Esta é considerada a primeira aplicação do cálculo fracionário presente na literatura. Sendo assim, a resolução do problema proposto por Abel parte do princípio da conservação de energia, que estipula a quantidade total de energia em um sistema isolado permanecendo constante. Pois, a soma entre a energia potencial e gravitacional e a energia cinética, é constante (CAMARGO; DE OLIVEIRA, 2015).

O problema da tautócrona, objetivou determinar uma curva lisa $f(n)$, passando pela origem em um plano vertical, sujeita a ação da gravidade. Dessa forma, uma partícula de massa m pode cair sobre ela, pois o tempo de descida será o mesmo, independente da posição inicial. No caso em τ é a constante e a equação que modela este problema é dada por (CAMARGO; DE OLIVEIRA, 2015):

$$\tau\sqrt{2.g} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) D_x^{-1/2} f'(x). \tag{2.1}$$

Outro exemplo envolvendo o cálculo fracionário é o estudo do conjunto de polias, em que aparecem as propriedades hereditárias apresentadas no livro do Pudlubny (PODLUBNY, 1993). Durante o desenvolvimento do cálculo fracionário, foram formuladas mais de uma definição de integral e derivadas. Para tal, visualizou-se definições essenciais para as aplicações, como a integral fracionária de Riemann-Liouville, derivadas fracionárias de Riemann-Liouville, Caputo, Riesz, Weyl, Riesz-Feller e Grünwald-Letinikov.

2.1 Integrais de Riemann-Liouville

As integrais de ordem arbitrária de Riemann-Liouville e suas variações, são definidas através de suas classes e funções, no qual os operadores podem ser aplicados, mostrando algumas propriedades e teoremas.

O conceito da integral fracionária será dada pelo produto da convolução de Laplace, que é composto pelo produto das transformadas de Laplace. Nesse caso, tem-se a integral fracionária no sentido Riemman-Liouville ou integral fracionária R-L, por (CAMARGO; DE OLIVEIRA, 2015):

Definição 2.1.1. *Seja* $\Omega = [a,b]$, *com* $-\infty < a < b < \infty$ *um intervalo finito no eixo real* $\mathbb{R}$. *As integrais de R-L* $(I^{\alpha}_{a+}f)(x)$ *e* $(I^{\alpha}_{b-}f)(x)$ *ambas de ordem* $\alpha \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$, *são definidas por (KILBAS et al., 2006):*

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \qquad x\ > a, \qquad Re(\alpha)\ > 0. \tag{2.2}$$

e

$$(I_{b-}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \qquad x\ < b, \qquad Re(\alpha)\ > 0. \tag{2.3}$$

estas integrais são integrais fracionária a esquerda e a direita, respectivamente.

Observou-se que a integração de ordem α no sentido Riemman-Liouville Eq.(2.2) e Eq.(2.3) das funções de potência $(x-a)^{\beta-1}$ e $(b-x)^{\beta-1}$, resultam em funções potência. (KILBAS et al., 2006):

Propriedade 2.1.1. *Se $\beta\ \in\ \mathbb{C}$ com $Re(\beta)\ > 0$, então:*

$$(I_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}(x)) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha-1} \qquad Re(\alpha)\ > 0. \tag{2.4}$$

e

$$(I_{b-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1}(x)) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(b-x)^{\beta+\alpha-1} \qquad Re(\alpha)\ > 0. \tag{2.5}$$

Joseph-Loius Lagrange [1772] contribuiu indiretamente para o cálculo de ordem arbitrária, quando desenvolveu a denominada lei dos expoentes, também conhecida como propriedades dos semigrupos. A propriedade aditiva dos semi-grupos dos operadores de integração fracionária (I_{a+}^{α}) e (I_{b-}^{α}) é dado a seguir:

Lema 2.1.1. *Se $Re(\alpha) > 0$ e $Re(\beta) > 0$, então as equações (CAMARGO; DE OLIVEIRA, 2015):*

$$\begin{aligned} (I_{a+}^{\alpha} \quad I_{a+}^{\beta} f)(x) &= (I_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x). \\ (I_{b-}^{\alpha} \quad I_{b-}^{\beta} f)(x) &= (I_{b-}^{\alpha+\beta} f)(x). \end{aligned} \tag{2.6}$$

São satisfeitas em quase todos os pontos $x \in [a,b]$ para $f(x) \in Lp\ (a,b)(1 \leq p \leq \infty)$. Se $\alpha+\beta > 1$ então as relações na Eq.(2.6) são válidas em qualquer ponto de [a,b].

2.2 Derivadas de Riemann-Liouville

Após definir a integral de ordem arbitrária α com $Re(\alpha) > 0$, a derivada de ordem arbitrária torna-se um requisito natural. Diferentemente do cálculo de ordem inteira, no cálculo fracionário, a integração e derivação de ordem arbitrária em geral, não são inversas entre si. A derivada de ordem arbitrária formalizada por Riemmann-Liouville é argumentada com base no fato da derivação ser operação inversa da integração e na lei dos expoentes (CAMARGO; DE OLIVEIRA, 2015).

Seja a função y dada no intervalo finito $[a, b]$, tem-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{a+}y)(x) &:= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{a+}y)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}; \\ n = [Re(\alpha)] + 1;\ x > a. & \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{b-}y)(x) &:= \left(\frac{-d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{b-}y)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{-d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}; \\ n = [Re(\alpha)] + 1;\ x < b. & \end{aligned} \tag{2.8}$$

As derivadas fracionárias das Eq.(2.7) e Eq.(2.8) são chamadas de derivadas fracionárias de Riemman-Liouville à direita e à esquerda respectivamente que, em outras palavras, equivalem as derivadas de ordem inteira de uma integral de ordem arbitrária (CAMARGO; DE OLIVEIRA, 2015).

Em particular, quando $\alpha = n \ \in \ \mathbb{N}_0$, então:

$$(D^0_{a+}y)(x) = (D^0_{b-}y)(x) = y(x); (D^n_{a+}y)(x) = y^{(n)}(x), \tag{2.9}$$

$$(D^n_{b-}y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x), \qquad n \in \ \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

onde $y^n(x)$ é a usual derivada de $y(x)$ de ordem n.

Propriedade 2.2.1. *Se $Re(\alpha) \geq 0$ e $\beta \in \mathbb{C}$ e $Re(\beta) > 0$, então:*

$$(D^{\alpha}_{a+}(t-a))^{\beta-1}(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta)-\alpha}(x-a)^{\beta-\alpha-1} \qquad Re(\alpha) \geq 0, \tag{2.11}$$

e

$$(D^{\alpha}_{b-}(b-t))^{\beta-1}(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta)-\alpha}(b-x)^{\beta-\alpha-1} \qquad Re(\alpha) \geq 0. \tag{2.12}$$

Assim, se $\beta = 1$ e $Re(\alpha) \geq 0$, então as derivadas de ordem arbitrária de Riemann-Liouville de uma constante são em geral, diferente de zero (CAMARGO; DE OLIVEIRA, 2015).

$$(D^{\alpha}_{a+}1)(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \qquad (D^{\alpha}_{b-}1)(x) = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \tag{2.13}$$

para $0 < Re < 1$.

Teorema 2.2.1. *Considere a função f(x) de tal modo que $y : [a,b] \to \mathbb{R}$, com $-\infty < a < b < \infty$, sendo que $\alpha \in \mathbb{C}$ $Re(\alpha) > 0$ e $n = [Re(\alpha)] + 1$. Se $y(x) \in AC^n[a,b]$, então para $x \in (a,b)$ tem-se (CAMARGO; DE OLIVEIRA, 2015):*

1) $(D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}y)(x) = y(x)$ e $(D^{\alpha}_{b-}I^{\alpha}_{b-})(x) = y(x)$.
2) Para $(I^{n-\alpha}_{a+}y(x)) \in AC^n[a,b]$ tem-se:

$$(D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}y)(x) = y(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-j-1}}{\Gamma(\alpha-j)} \left[\left(D^{n-j-1} I^{n-\alpha}_{a+} f(x) \right) |_{x=a} \right], \tag{2.14}$$

Se $(I^{n-\alpha}_{b-}) \in AC^n[a,b]$ então:

$$(I^{\alpha}_{b-}D^{\alpha}_{b-}y)(x) = y(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(b-x)^{\alpha-j-1}}{\Gamma(\alpha-j)} \left[\left(D^{n-j-1} I^{n-\alpha}_{b-} y(x) \right) |_{x=b} \right]. \tag{2.15}$$

Para $f(x) \in I^{\alpha}_{a+}(Lp)$ onde,

$$(D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}y)(x) = y(x), \tag{2.16}$$

Para $f(x) \in I^{\alpha}_{b-}(Lp)$ onde,

$$(D^{\alpha}_{b-}I^{\alpha}_{b-}y)(x) = y(x). \tag{2.17}$$

Em particular se $0 < Re(\alpha) < 1$ nas Eq.(2.14) e Eq.(2.15), logo:

$$(D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}y)(x) = y(x) - \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[\left(I^{1-\alpha}_{a+}y(x)\right)|_{x=a}\right], \tag{2.18}$$

e

$$(I^{\alpha}_{b-}D^{\alpha}_{b-}y)(x) = y(x) - \frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[\left(I^{1-\alpha}_{b-}y(x)\right)|_{x=b}\right]. \tag{2.19}$$

Se $\alpha = 1$,

$$\left(I^{1}_{a+}D^{1}_{a+}y\right)(x) = y(x) - y(a),$$

e

$$\left(I^{1}_{b-}D^{1}_{b-}y\right)(x) = y(x) - y(b).$$

Além disso,

$$\left(aI^{1}_{b}D^{1}_{a+}y\right)(x) = y(b) - y(a),$$

e

$$\left(aI^{1}_{b}D^{1}_{b-}y\right)(x) = y(a) - y(b).$$

Prova 2.2.2. *Se $f(x) \in I^{\alpha}_{a+}(L_p)$, tem $f(x) = I^{\alpha}_{a+}g(x)$. Assim:*

$$(I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}y)(x) = I^{\alpha}_{a+}\left[\left(D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}g\right)(x)\right] = \left(I^{\alpha}_{a+}g\right)(x) = y(x). \tag{2.20}$$

Agora se $y(x) \in I^{\alpha}_{b-}(L_p)$, segue de forma análoga que:

$$(I^{\alpha}_{b-}D^{\alpha}_{b-}y)(x) = y(x). \tag{2.21}$$

As Eq.(2.14) e Eq.(2.15), em caso particular $0 < Re(\alpha) < 1$ substituindo $n = 1$ as Eq.(2.14) e Eq.(2.15).

No caso $\alpha = 1$ tem-se:

$$(aI_b^1 D_{a+}^1 y)(x) = \left[\left(I_{a+}^1 D_{a+}^1 y\right)(x)\right]|_{x=b} \quad = \quad [y(x) - y(a)]\,|_{x=b} = y(b) - y(a), \quad (2.22)$$

$$(aI_b^1 D_{b-}^1 y)(x) = \left[\left(I_{b-}^1 D_{b-}^1 y\right)(x)\right]|_{x=b} \quad = \quad [y(x) - f(b)]\,|_{x=b} = y(a) - y(b). \quad (2.23)$$

2.3 Derivada de Caputo

Caputo(1969) propôs uma nova definição para a derivada fracionária, com mais limitações, baseada na definição de Riemann-Liouville, porém com uma inversão na ordem das operações de integração e derivação (CAMARGO; DE OLIVEIRA, 2015).

Definição 2.3.1. *Seja o número $Re(\alpha) > 0$ e o inteiro $n > 0$, com $n - 1 < \alpha \leq n$ a derivada fracionária de Caputo de ordem α é:*

$$^{c}D_{a+}^{\alpha} y(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}. \quad (2.24)$$

$$^{c}D_{b-}^{\alpha} y(x) = (-1)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{y^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}. \quad (2.25)$$

respectivamente são as derivadas à esquerda e à direita, onde $D = d/dx$ e $n = \alpha$.

Teorema 2.3.1. *Seja $Re(\alpha) > 0$ e n dado por $n = [Re(\alpha)] + 1$, onde $Re(\beta) > 0$. Logo as relações abaixo são válidas (KILBAS et al., 2006).*

$$cD_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} \qquad Re(\beta) > n. \quad (2.26)$$

$$^{c}D_{b-}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-b)^{\beta-\alpha-1} \qquad Re(\beta) > n. \quad (2.27)$$

$(^{c}D_{a+}^{\alpha}(t-a)^k)(x) = 0$ e $cD_{b-}^{\alpha}(t-a)^k)(x) = 0$, com $k = 0, 1, ..., n-1$.

Com isso concluí-se que:

$$\begin{aligned}({}^cD^\alpha_{a+}1)(x) &= 0,\\ ({}^cD^\alpha_{b-}1)(x) &= 0.\end{aligned} \tag{2.28}$$

nota-se que a derivada de Caputo de uma função constante é igual a zero.

Teorema 2.3.2. *Seja $y(x)$ a função, com $-\infty < a < b < \infty$ e seja $\alpha \in \mathbb{C}$ com $Re(\alpha) > 0$ e $n = [Re(\alpha)] + 1$. Se $y(x) \in AC^n[a,b]$ para $x \in (a,b)$ (KILBAS et al., 2006):*

1- Para $Re(\alpha) \neq \mathbb{N}$ ou $\alpha \in \mathbb{N}$, tem-se:
$({}^cD^\alpha_{a+}I^\alpha_{a+}y)(x) = f(x)$ e $(cD^\alpha_{b-}I^\alpha_{b-}y)(x) = y(x)$.
2- Tem-se
$(I^\alpha_{a+}{}^cD^\alpha_{a+}y)(x) = y(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x-a)^j}{j!}\left(y^{(j)}(x)|_{x=a}\right),$
e
$(I^\alpha_{-b}{}^cD^\alpha_{a+}y)(x) = y(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(b-x)^j}{j!}\left(y^{(j)}(x)|_{x=b}\right).$
Em particular, se $0 < Re(\alpha) < 1$, tem-se:

$$\begin{cases}(I^\alpha_{a+}{}^cD^\alpha_{a+}y)(x) = y(x) - y(a),\\ (I^\alpha_{-b}{}^cD^\alpha_{a+}y)(x) = y(x) - y(b),\end{cases} \tag{2.29}$$

Se $\alpha = 1$, tem-se:
$(aI^1_{a+}{}^cD^1_{a+}y)(x) = y(b) - y(a),$
$(aI^1_{-b}{}^cD^1_{a+}y)(x) = y(a) - y(b).$

Proposição 2.3.1. *Seja $\alpha > 0$, $n - 1 < \alpha < n$, $(n \in \mathbb{N})$ e f, tal que $f \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}_+)$, $|f(t)|$, $|f^{(')}(t)|$, ..., $|f^{(t)}| \leq Be^{S_0t}$, B, $S_0 > 0$, $t > 0$ (KILBAS et al., 2006).*

Seja $\lim_{t\to\infty}(f)^{(x)}(t) = 0$, para $k = 0, 1..., n-1$.

Então a transformada de Laplace da derivada da esquerda de Caputo é o seguinte:

$$\mathcal{L}\left[{}^c_0\, D^\alpha_t f(t)\right](s) = s^a\tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0), \qquad Re\ s > s_0. \tag{2.30}$$

Para $0 < \alpha < 1$, expressão (2.30) equivale:

$$\mathcal{L}\left[{}_0^c D_t^\alpha f(t)\right](s) - s^a \tilde{f}(s) - s^{\alpha-1} f(0), \qquad Re\ s > s_0. \tag{2.31}$$

2.4 Integral e Derivada de Weyl

2.4.1 Integral de ordem arbitrária de Weyl

Definição 2.4.1. *A integral de Weyl de uma função $y(x)$ localmente integrável em (∞, ∞) de ordem α é denominada por ${}_xW_\infty^\alpha$ e definida por:*

$$\begin{aligned} ({}_xW_\infty^\alpha y) &= (xI_\infty^\alpha y)(x) = (I_-^\alpha y)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} y(t)dt, \qquad -\infty < x < \infty. \end{aligned} \tag{2.32}$$

onde $\alpha \in \mathbb{C}$ e $R(\alpha) > 0$.

2.4.2 Derivada de ordem arbitrária de Weyl

Definição 2.4.2. *Seja $\alpha > 0$ e m o menor inteiro maior que β, de forma $\beta = m - \alpha > 0$. Se para qualquer função y, I_∞^α existe e tem derivadas contínuas, então a derivada arbitrária de Weyl é definida da seguinte forma (MATHAI et al., 2009):*

$$\begin{aligned} (xD_\infty^\alpha y)(x) &= (D_-^\alpha y)(x) = (-1)^m \left(\frac{d}{dx}\right)^m (xW_\infty^{m-\alpha} y(x)) \\ &= (-1)^m \left(\frac{d}{dx}\right) \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_x^\infty \frac{y(t)dt}{(t-x)^{1+\alpha-m}}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

com $-\infty < x < \infty$.

Nota-se que esta definição não depende da validade da lei dos expoentes, ou seja, não depende da ordem de integração e derivação.

Propriedade 2.4.1. *Se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, então a propriedade do semi-grupo é válida (MATHAI et al., 2009):*

$$({}_xW_\infty^\alpha \ \ {}_xW_\infty^\beta) = ({}_xW_\infty^{\beta+\alpha}) = ({}_xW_\infty^\beta \ \ {}_xW_\infty^\alpha). \tag{2.34}$$

Propriedade 2.4.2. *Dada as funções reais $\psi(x)$ e $\varphi(x)$, a seguinte igualdade é válida (MATHAI et al., 2009):*

$$\int_0^\infty \varphi(x)(J_x^\alpha \psi(x))dx = \int_0^\infty \varphi(x)(W_\infty^\alpha \psi(x))dx. \tag{2.35}$$

Esta equação é chamada integral fracionária por partes, sendo conhecida por identidade de Parseval. Ela pode ser estabelecida intercalando a ordem de integração (MATHAI et al., 2009).

2.5 Derivadas de Riesz

A derivada de ordem arbitrária de Riesz, pode ser definida de duas maneiras, a primeira através da derivada fracionária de Weyl, e a outra, a partir da transformada de Fourier (CAMARGO; DE OLIVEIRA, 2015).

Definição 2.5.1. *Seja a função $y(x)$, com $0 < \alpha < 2$ e $\alpha \neq 1$, a derivada fracionária de Riesz de ordem α é definida da seguinte forma (CAMARGO; DE OLIVEIRA, 2015):*

$$D_x^\alpha f(x) = -\frac{D_+^\alpha y(x) + D_-^\alpha y(x)}{2cos(\alpha\pi/2)}. \tag{2.36}$$

onde $D_\pm^\alpha y(x)$ são derivadas fracionárias de Weyl.

Propriedade 2.5.1. *Definindo a derivada de Riesz, através da transformada de Fourier sendo dada pela seguinte expressão (CAMARGO; DE OLIVEIRA, 2015):*

$$\mathfrak{F}[D^\alpha x y(x)] = -|\omega|^\alpha F(\omega). \tag{2.37}$$

$$D_x^\alpha y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^\alpha F(\omega) e^{i\omega x} d(\omega). \tag{2.38}$$

Potencial de Riesz

Considerando a seguinte integral, para $0 < \alpha < 1$ (ATANACKOVIC et al., 2014):

$$D^\alpha y(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)cos\frac{\alpha\pi}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x-\zeta|^{1-\alpha}} y(\zeta), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.39}$$

$$H^{\alpha}y(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)sin\frac{\alpha\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin(x-\zeta)}{|x-\zeta|^{1-\alpha}} y(\zeta), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.40}$$

Então, $D^{\alpha}y$ é chamado potencial de Riesz de y de ordem α em $\mathbb{R}$, $H^{\alpha}y$ é o conjugado do potencial de Riesz, com ordem α em $\mathbb{R}$ (ATANACKOVIC et al., 2014).

Proposição 2.5.1. *Para $x \in \mathbb{R}$, se diz que a integral de Riemann-Liouville e o Potencial de Riesz, estão ligados da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned}
-\infty I_x^{\alpha}y(x) &= cos\frac{\alpha\pi}{2}D^{\alpha}y(x) + sin\frac{\alpha\pi}{2}H^{\alpha}y(x),\\
xI_{\infty}^{\alpha}y(x) &= cos\frac{\alpha\pi}{2}D^{\alpha}y(x) - sin\frac{\alpha\pi}{2}H^{\alpha}y(x),\\
D^{\alpha}y(x) &= \frac{1}{2cos\frac{\alpha\pi}{2}}(-\infty I_x^{\alpha}y(x) - xI_{\infty}^{\alpha}y(x)),\\
H^{\alpha}y(x) &= \frac{1}{2sin\frac{\alpha\pi}{2}}(-\infty I_x^{\alpha}y(x) - xI_{\infty}^{\alpha}y(x)).
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Se $\alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta < 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}D\beta y(x) &= D^{\alpha\beta}y(x),\\
H^{\alpha}H\beta y(x) &= -D^{\alpha\beta}y(x).
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Teorema 2.5.1. *Seja $h(x) = |x|^{-\alpha-1}$, com $1 < \alpha < 2$. Pode-se escrever a derivada fracionária de Riesz de ordem, por um produto de convolução de Fourier:*

$$D_x^{\alpha}f(x) = d_{\alpha}(f * h)(x),\ com\ d_{\alpha} = -\frac{1}{2\Gamma(-\alpha)cos(\frac{\alpha\pi}{2})}, \tag{2.43}$$

A demonstração deste resultado é dada a seguir:

$$\begin{aligned}
D_x^{\alpha} f(x) &= \frac{-1}{2cos(\frac{\alpha\pi}{2})}\left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{d^2}{dx^2}\int_{-\infty}^{x}(x-\xi)^{1-\alpha}f(\xi)d\xi + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{d^2}{dx^2}\int_{x}^{\infty}(x-\xi)^{1-\alpha}f(\xi)d\xi\right] \\
&= \frac{-1}{\Gamma(2-\alpha)2cos(\frac{\alpha\pi}{2})}\frac{d^2}{dx^2}\left[\int_{-\infty}^{x}(x-\xi)^{1-\alpha}f(\xi)d\xi + \int_{x}^{\infty}(x-\xi)^{1-\alpha}f(\xi)d\xi\right] \\
&= \frac{-1}{\Gamma(2-\alpha)2cos(\frac{\alpha\pi}{2})}\frac{d^2}{dx^2}\int_{-\infty}^{\infty}|x-\xi|^{1-\alpha}f(\xi)d\xi \\
&= \frac{-1}{\Gamma(2-\alpha)2cos(\frac{\alpha\pi}{2})}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2}{dx^2}|x-\xi|^{1-\alpha}f(\xi)d\xi \\
&= \frac{(-1)(1-\alpha)(-\alpha)}{2\Gamma(2-\alpha)cos(\frac{\alpha\pi}{2})}\int_{-\infty}^{\infty}|x-\xi|^{1-\alpha}f(\xi)d\xi \\
&= -\frac{1}{2\Gamma(-\alpha)cos(\frac{\alpha\pi}{2})}\int_{-\infty}^{\infty}|x-\xi|^{-1-\alpha}f(\xi)d\xi.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

2.6 Derivada de Riesz-Feller

Definição 2.6.1. *A derivada de Riesz-Feller, no espaço-fracionário de ordem α e assimetria θ, denotado por xD_θ^α, sendo que é definido pela transformada de Fourier (MAINARDI, 1996):*

$$\mathfrak{F}\{xD_\theta^\alpha y(x)\} = -\Psi_\alpha^\theta(p)\widehat{f}(p). \tag{2.45}$$

onde x, $p \in \mathbb{R}$ e $\widehat{f}(p)$ é a transformada de Fourrier de $f(x)$. Com ordem $0 < \alpha \leq 2$, com assimetria em $|\theta| \leq \; min\ \{\alpha, 2-\alpha\}$ e

$$\Psi_\alpha^\theta(p) = |p|^\alpha \; e^{i(signp)\theta\pi/2}. \tag{2.46}$$

2.7 Derivada de Grünwald-Letinikov

Primeiro Grünwald (1867) logo em seguida Letnikov(1868) estudaram a derivada fracionária, unificando os resultados de Riemann-Lioville, introduzindo a ideia de derivada de ordem arbitrária como limite de uma certa soma (CAMARGO; DE OLIVEIRA, 2015).

A derivada de Grünwald-Letinikov vem sendo utilizada em diversas aplicações na engenharia, isso acontece devido a uma melhor descrição em problemas mais complexos e o uso de suas principais características, que são a forma explícita para o cálculo da derivada fracionária e o efeito de memória. Este último caracteriza o operador não local, ou seja, os valores distantes do ponto analisado influenciam no comportamento do fenômeno.

Alguns autores desenvolveram vários trabalhos, utilizando esta derivada como ferramenta na resolução de problemas numéricos. Nesse meio, tem-se o Lorenzo e Hartley, que utilizaram essa ferramenta para propor uma interpretação geométrica para derivada de ordem arbitrária (CAMARGO; DE OLIVEIRA, 2015). Sendo assim, nesta secção apresentou-se as definições e propriedades das derivadas de ordem arbitrária de Grünwald-Letinikov.

Definição 2.7.1. *Seja y uma função definida em um intervalo qualquer, x um ponto fixo no interior deste intervalo as derivadas de ordem arbitrária de Grünwald-Letinikov da direita e esquerda são definidas por (ORTIGUEIRA, 2011):*

$$y_{+}^{(\alpha)}(x) = \lim_{h\to+0} \frac{(\Delta_h^{\alpha} y)(x)}{h^{\alpha}} \qquad (\alpha > 0), \tag{2.47}$$

$$y_{-}^{(\alpha)}(x) = \lim_{h\to-0} \frac{(\Delta_{-h}^{\alpha} y)(x)}{h^{\alpha}} \qquad (\alpha > 0). \tag{2.48}$$

em que $\Delta_h^{\alpha} y(x)$ e $\Delta_{-h}^{\alpha} y(x)$ é uma diferença finita de ordem $\alpha \in \mathbb{N}_0$ de uma função $y(x)$ com passo $h \in \mathbb{R}$ e centrada no ponto $x \in \mathbb{R}$

Sendo que esta definição é baseada na diferenciação finita que é dada por:

$$y^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(\Delta_h^{n} y)(x)}{h^{n}} \text{ com } n \in \mathbb{R},\ h \text{ e } x \in \mathbb{R}. \tag{2.49}$$

A diferença finita é utilizada para definir uma derivada de ordem arbitrária substituindo na Eq.(2.49), $n \in \mathbb{N}$ por $\alpha > 0$, logo:

$$(\Delta_h^{\alpha} y)(x) := \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \begin{pmatrix} \alpha \\ m \end{pmatrix} y(x - mh),\ \text{com } x,\ h, \in \mathbb{R}. \tag{2.50}$$

com

$$\left(\begin{array}{c} \alpha \\ m \end{array} \right) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}.$$

Com isso a derivada de ordem arbitrária de Grünwald-Letinikov foi definida da seguinte forma:

$$D^{\alpha}y(x) = \lim_{h\to 0}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \left(\begin{array}{c} \alpha \\ m \end{array} \right) y(x-mh). \tag{2.51}$$

Alguns autores consideram a série apresentada na Eq.(2.50) um aparente paradoxo ao que Leibniz referiu-se em sua carta à L'Hospital. (CAMARGO; DE OLIVEIRA, 2015).

Propriedade 2.7.1. *Linearidade - A propriedade de linearidade da derivada fracionária é valida a partir (ORTIGUEIRA, 2011):*

$$D_a^{\alpha}[y(x)+g(x)] = D_a^{\alpha}y(x) + D_a^{\alpha}g(x). \tag{2.52}$$

Propriedade 2.7.2. *Casualidade - Considerando, $t = x \in \mathbb{R}$, sendo que $y(t) = 0$, para $t < 0$, logo tem-se $D_a^{\alpha}y(t) = 0$, para $t < 0$ (ORTIGUEIRA, 2011).*

Propriedade 2.7.3. *Semi-grupo ou adição de expoentes - Se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, então a propriedade do semi-grupo é válida (ORTIGUEIRA, 2011):*

$$(\Delta_h^{\alpha}\Delta_h^{\alpha}y)(x) = (\Delta_h^{\alpha+\beta}y)(x). \tag{2.53}$$

Propriedade 2.7.4. *Mudança de escala - Seja $y(x) = g(ax)$, onde a é a constante. Seja $h = |h|e^{i\theta}$ e $a = |a|e^{i\phi}$. A partir da Eq. (2.51) tem-se:*

$$\begin{aligned} D_{\theta}^{\alpha}g(ax) &= \lim_{h\to 0}\frac{\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \left(\begin{array}{c} \alpha \\ m \end{array} \right) g(ax-kah)}{h^{\alpha}} \\ &= a^{\alpha}\lim_{h\to 0}\frac{\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \left(\begin{array}{c} \alpha \\ m \end{array} \right) g(ax-kah)}{ah^{\alpha}} \\ &= a^{\alpha}D_{\theta+\phi}^{\alpha}g(\tau)|_{\tau=ax}. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Propriedade 2.7.5. *Tempo reverso - Se* (x) *é o tempo e* $f(x) = g(-x)$ *usando a propriedade acima, então:*

$$
\begin{aligned}
D_\theta^\alpha g(ax) &= (-1)^\alpha \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \begin{pmatrix} \alpha \\ m \end{pmatrix} g(-x+kh)}{(-h^\alpha)} \\
&= (-1)^\alpha D_{\theta+\phi}^\alpha g(\tau)|_{\tau=-x}. \qquad (2.55)
\end{aligned}
$$

isso significa que a reversão do tempo converte o derivado direto para trás e vice-versa.

Propriedade 2.7.6. *Função de casualidade anti-casualidade - Seja* $f(t) = t^\rho$ *para* $t > 0$ *e* $f(t) = 0$ *para* $t < 0$*, logo:*

$$
D_f^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho-\alpha+1)}^{\rho-\alpha}, \; t > 0. \qquad (2.56)
$$

Para a função anti-causalidade $g(t) = t^\rho$ *para* $t < 0$ *e* $g(t) = 0$ *para* $t \geq 0$*, dado por:*

$$
D_b^\alpha f(t) = (-1)^\alpha \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho-\alpha+1)}^{\rho-\alpha}, \; t < 0. \qquad (2.57)
$$

Propriedade 2.7.7. *Se* $\alpha > 0$ *e* $y(x) \in L_1(\mathbb{R})$*, então a transformada de Fourrier de* Δ_h^α *é dada por:*

$$
(\mathfrak{F}\Delta_h^\alpha y)(x) = (1 - e^{ixh})^\alpha (\mathfrak{F}y)(x). \qquad (2.58)
$$

Em particular, quando $\alpha = n \in \mathbb{N}$, aplicando na Eq.(2.50) tem-se (ORTIGUEIRA, 2011):

$$
(\Delta_h^\alpha y)(x) := \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} y(x-mh), \qquad \textit{com } x, h, \in \mathbb{R}. \qquad (2.59)
$$

Definindo a diferença finita $\Delta_h^\alpha(x)$ para $\alpha = 0$, então:

$$
(\Delta_h^0 f)(x) = f(x). \qquad (2.60)
$$

Prosseguindo com Eq.(2.49) têm-se as derivadas de ordem arbitrárias de Grünwald-Letnikov $y_+^\alpha(x)$ e $y_+^\alpha(x)$, da direita e esquerda respectivamente.

$$y_{+}^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \to +0} \frac{(\Delta_h^{\alpha} y)(x)}{h^{\alpha}} \qquad (\alpha > 0). \tag{2.61}$$

$$y_{-}^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \to -0} \frac{(\Delta_{-h}^{\alpha} y)(x)}{h^{\alpha}} \qquad (\alpha > 0). \tag{2.62}$$

através da Eq.(2.61), verifica-se a seguinte definição:

$$D^{\alpha} y(x) = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1) y(x-kh)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}, \tag{2.63}$$

desde que o limite exista.

Utilizando a identidade:

$$(-1)^{\gamma} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)} = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)}, \tag{2.64}$$

o resultado de Eq.(2.63) é

$$D^{\alpha} y(x) = \lim_{h \to +0} \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} f(x-kh). \tag{2.65}$$

Quando α é igual a um inteiro m , a definição Eq.(2.63) reduz-se a integral de ordem m como:

$$D^{m} f(x) = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h^{m}} \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} f(x-kh). \tag{2.66}$$

onde $\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}$ é o coeficiente binômio usual.

O resultado Eq.(2.66) segue das definições clássicas das derivadas $f'(x), f''(x), \cdots$, respectivamente como:

$$Df(x) = \lim_{h \to +0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{\Delta f(x)}{h}, \tag{2.67}$$

$$D^2f(x) = \lim_{h\to+0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} = \lim_{h\to+0} \frac{\Delta^2 f(x)}{h^2}. \tag{2.68}$$

onde

A expressão (2.50) da diferença de ordem arbitrária $(\Delta_h^\alpha y)(x)$ admite a função $y(x)$ é dada pelo menos no semi-eixo. Para a função $y(x)$ dada num intervalo finito $[a, b]$, tal diferença pode ser definida como uma continuação da função $y(x)$ truncada além de $[a, b]$ (ORTIGUEIRA, 2011):

$$(\Delta_h^\alpha y)(x) = (\Delta_h^\alpha y^*)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} y(x - kh) \qquad x, h \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \tag{2.69}$$

onde

$$y^* = \begin{cases} y(x), & x \in [a, b], \\ 0, \quad x \notin [a, b]. \end{cases} \tag{2.70}$$

Com isso pode-se reescrever a diferença de ordem arbitrária Eq.(2.69) e termos da função $y(x)$, sendo que definidas da seguinte forma:

$$\Delta_{h,a+}^\alpha y(x) := \sum_{k=0}^{[\frac{x-a}{h}]} (-1)^k \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} y(x - kh), \quad x \in \mathbb{R},\ h > 0,\ \alpha > 0, \tag{2.71}$$

e

$$\Delta_{h,b-}^\alpha y(x) := \sum_{k=0}^{[\frac{b-x}{h}]} (-1)^k \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} y(x + kh), \quad x \in \mathbb{R},\ h > 0,\ \alpha > 0. \tag{2.72}$$

A derivada fracionária de Grünwald-Letnikov é uma grande aliada na resolução de problemas numéricos. Destaca-se seu uso computacional, uma vez que, como já destacado, a derivada fracionária pode ser calculada numericamente, devido a sua forma explícita em funções dos valores $y(x)$.

3

Difusão Fracionária

A difusão é um fenômeno comum na natureza e está presente em quase todos os campos da engenharia e ciência. Na natureza é um processo que tende a modificar o sistema até que atinja o estado de equilíbrio, sendo fundamental nos processos químicos, físicos e biológicos (PEDRON, 2015).

Ter uma compreensão de como procede tais fenômenos difusivos, é muito importante, pois dá condições de entender as causas do mecanismo e seus princípios elementares. Estes se caracterizam pelo funcionamento que consiste na movimentação de partículas de um meio com maior concentração, para um com menor concentração.

Isto é, as partículas se movimentam independentemente umas das outras chocando-se frequentemente com as moléculas do meio em que estão inseridas, sendo que dificilmente chocam-se entre si. A saber, tem-se o processo de difusão de substância através do meio, como uma gota de tinta que se dilui na água, a fumaça se "espalhando" pelo ar, um líquido evaporando no ambiente, dentre outros (PEDRON, 2015).

Como parte desse processo, além da difusão usual, existe também, a difusão não-usual conhecida como anômala, que tem como principal característica, o crescimento não-linear da variância, no decorrer do tempo. O seu marco inicial deu-se com o estudo da difusão turbulenta realizado por Lewis Fry Richardson (1851-1953) (PEDRON, 2015).

3.1 Breve História

Tratando do contexto histórico, o estudo da difusão foi de interesse de vários pesquisadores, dentre eles, matemáticos, médicos, biólogos e físicos. Portanto, os pesquisadores que contribuíram diretamente para o avanço da difusão foram: Jean Josph Baptiste Fourier (1768-1830), Thomas Graham(1805-1869), Adolph Eugen Fick (1852-1937) e Lewis Fry Richardson (1851-1953) (VIEIRA, 2010).

Os estudos dos processos difusivos foram iniciados pelo físico Jean Josph Baptiste Fourier (1768-1830), através da discussão de forma abrangente, sobre os aspectos do fluxo de calor em corpos.

Em relação ao trabalho realizado por Fourier, um dos mais importantes, discorreu acerca da propagação do calor, contribuindo assim, para a formulação da lei de propagação do calor, sendo apresentada e intitulada *Théorie de la Propagation de la Chaleur dans les Solides* (1807), nesse período várias teorias mecânicas/termodinâmicas e equações diferenciais estavam sendo formuladas (TATEISHI, 2010).

Além das contribuições conjecturadas, Fourier influenciou no desenvolvimento de vários estudos na área da difusão, como na física, química e biologia. Alguns trabalhos como: *Die Galvaniche Kette* intitulado por Simon Ohm (1787-1854), difusão dos gases e difusão de sais líquidos realizados por Thomas Graham (1805 - 1869), leis fenomenológicas realizados por Adolf Eugen Fick (1821 - 1901), tiveram a influência do autor referido. (TATEISHI, 2010).

O primeiro estudo sistemático da difusão foi realizado por Thomas Graham (1805 - 1869). O pesquisador nasceu em Glasgow, 1805 e foi o inventor da diálise, que definiu como um método de separação por difusão, através de uma membrana.(1854) (TATEISHI, 2010).

Graham realizou estudo sobre difusão de gases e líquidos, entre 1828 a 1833 e apresentou seus resultados à Sociedade Real de Edimburgo, em 1831. Através desse trabalho, ele descobriu que quanto menos denso um gás, maior a sua velocidade de difusão. Dessa maneira, com base nesse estudo, enunciou-se a Lei de Graham: As velocidades de difusão de gases, nas mesmas condições de temperaturas e pressão, são inversamente proporcionais as raízes quadradas de suas densidades, isto é:

$$\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{d_2}{d_1}}. \tag{3.1}$$

onde V_1 é a velocidade do gás 1, V_1 é a velocidade do gás 2, d_1 é a densidade do gás 1, d_2 é a densidade do gás 2.

O pesquisador não realizou somente uma experiência quantitativa de difusão, mas, fez a primeira medição confiável que permitiu a determinação do coeficiente de difusão. Em consequência disso, vários pesquisadores foram influenciados, como Adolf Eugen Fick (1821 - 1901) que estabeleceu o coeficiente de difusão, Maxwell (1867) que calculou os coeficientes de difusão em gases e J. Loschmidt (1863) que realizou medidas clássicas na difusão, em um punhado de pares do gás, dentre outras. (GONZÁLEZ, 2006)

Graham realizou uma série de experiências de difusão em líquidos e notou que esta ocorre em três ordens de magnitude menor do que em gases e que a taxa de difusão abrandou durante o tempo. (GONZÁLEZ, 2006)

Assim, sabe-se de outro pesquisador que contribuiu de modo significativo para o estudo da difusão, o fisiologista alemão Adolf Eugen Fick (1821 - 1901). Antes de ingressar na faculdade de medicina em Berlim, cursou dois anos de física na universidade de Marburg, sendo um dos pioneiros a publicar um artigo na área da física médica, o tratado *Die medizinische Physik* (1856). Em seu trabalho discutiu problemas biofísicos, como misturar o ar nos pulmões, o trabalho do coração, a economia do calor no corpo humano, a mecânica da contração muscular, e outros. (TATEISHI, 2010)

Além do trabalho brilhante na área da medicina Fick realizou ótimas pesquisas utilizando os fenômenos difusivos, no artigo *Uber Diffusion* (1855), consta citações a trabalhos realizados por Graham com relação a difusão de sais e Fourier sobre a condutividade e a lei de ohm (TATEISHI, 2010).

Ao longo de seus estudos, Fick afirmou que o fluxo de matéria é proporcional ao gradiente de sua concentração, com um fator de proporcionalidade k, que ele chamou de "uma constante dependente da natureza das substâncias", sendo que ele despreza as forças externas que poderiam atuar no sistema, como a gravidade, originando a 1º lei de Fick (TATEISHI, 2010).

No decorrer dos anos, pesquisas relativas a difusão foram evoluindo graças também, aos estudos desenvolvidos pelo cientista inglês, Lewis Fry Richardson, matemático, físico, meteorologista, psicólogo e pacifista. Ainda que seu nome esteja ligado a vários resultados relacionados na dinâmica dos fluídos, na meteorologia e na análise numérica (VULPIANI, 2014).

Portanto, com base na Lei de Fick, Richardson propôs a seguinte equação para a difusão turbulenta (TATEISHI, 2010):

$$\frac{\partial}{\partial t}P\left(\ell,t\right)=\frac{\partial}{\partial l}\left(D(\ell)\frac{\partial}{\partial \ell}P(\ell,t)\right). \tag{3.2}$$

Essa difusão turbulenta foi o marco inicial para realização de pesquisas e estudos sobre a difusão anômala, a partir daí, diversos pesquisadores, tanto teóricos, quanto experimentais, realizaram estudos nessa área. (TATEISHI, 2010)

3.2 Difusão Anômala

A difusão anômala tem como característica, o crescimento não linear da variância no decorrer do tempo, ou seja, a difusão será considerada anômala se houver desvio no comportamento, isto é, variação no crescimento linear do deslocamento quadrático médio.

O estudo da difusão anômala iniciou com Lewis Fry Richardson que realizou o estudo da difusão turbulenta. Como resultado escreveu um artigo intitulado *Atmospheric Diffusion Shown on a Distance Neighbour Graph* (1926). (PEDRON 2015)

Esse processo difusivo tem aplicação em diversas áreas tais como: Difusão em plasma, difusão e fluidos turbulentos, transporte dos fluidos em meio poroso, difusão em fractais, análise de histogramas de batidas do coração em indivíduos saudáveis, entres outros sistemas físicos. (PEDRON 2015).

O comportamento anômalo tem por descrição o crescimento da variância, sendo que pode ser descrito por uma lei de potência. (GONZÁLEZ, 2006):

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \sim \alpha t^{\beta}, \tag{3.3}$$

Algumas classificações, se $\beta < 1$ o processo é subdifusivo, se $\beta > 1$ o processo é superdifusivo, se $\beta = 1$ descreve uma difusão padrão.

Desse modo, a difusão anômala possui em seu sistema diversas características, por exemplo, ela pode não ter uma variância finita, do tipo Lévy, mas também, pode apresentar um segundo momento finito, no qual pode-se citar a descrição dos transportes no meio poroso. (GONZÁLEZ, 2006)

Sabe-se que a principal propriedade da difusão anômala é o crescimento não linear no tempo do deslocamento quadrático médio (leis do movimento browniano). Para descrever esse tipo de difusão utiliza-se como modelagem as derivadas fracionárias na equação de difusão usual (GONZÁLEZ, 2006).

3.3 Equação de difusão em meio poroso

A equação de difusão em um meio poroso foi inserida no século passado, em conexão com a física, pelo cientista francês Jean Valentin Boussinesq. O autor foi o primeiro a propor a equação de difusão, num meio poroso, através de um modelo matemático para um processo físico. Precisamente para calcular a altura do montículo de água na infiltração de águas subterrâneas. Ele usou como lei, o fluxo básico proposto por H. Darcy em 1856, nesse caso com $m = 2$.(VÁZQUEZ, 2007)

Em 1930, a equação de difusão em meio poroso aparece novamente, desta vez para $m \geq 2$ no estudo de gases num meio poroso, ligados à extração de petróleo, nos trabalhos de dois engenheiros, o russo L. Leibenzon e o americano M. Muskat (VÁZQUEZ, 2007). Em 1948 o problema de infiltração de águas subterrânea em meio poroso foi realizado por Polubarinova- Kochina, onde propôs uma solução de similaridade que melhorou o conhecimento de soluções especiais e seu papel na propagação finita (VÁZQUEZ, 2007).

A equação no meio poroso é dada por (VÁZQUEZ, 2007):

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \Delta(u^m(x,t)),\ m > 1, \tag{3.4}$$

onde $u(x,t)$ é uma função escalar não negativa do espaço $x \in \mathbb{R}$ e tempo $t \in \mathbb{R}$, $\Delta = \Delta_x$ representa o operador de Laplace (VÁZQUEZ, 2007). É um grande exemplo de equação diferencial parcial não linear. Em particular quando para $m = 2$ obtém-se a equação Boussinesq. Outras aplicações que surgem desta equação são fluxo de gás através de um meio poroso (Equação de Darcy-Lubenzon-Muskai), o modelo de transferência de calor não linear (Equação de Zeinovich-Raizer), o fluxo de águas subterrâneas descritas pelo modelo de Boussinesq, dentre outras (VÁZQUEZ, 2007).

3.3.1 Fluxo de gás através de um meio poroso

De acordo com Leibenzon e Muskat, o fluxo de gás num meio poroso pode ser formulado de um ponto de vista macroscópio em termos da densidade de variáveis que será representado por ρ, pressão será dada por p, velocidade será dada por V, que são funções relacionadas ao tempo. Em decorrência disso esses valores estão relacionados pelas seguintes leis (VÁZQUEZ, 2007):

(II) A equação de continuidade na mecânica dos fluídos que é dada por:

$$\varepsilon\rho + \nabla.(\rho V) = 0, \tag{3.5}$$

Nesse caso, $\varepsilon \in (0,1)$ representará a porosidade do meio e ∇ é operador de divergência.

(II) A dinâmica dos fluxos através de meios porosos ou lei de Darcy;

$$\mu V = -K\nabla p, \tag{3.6}$$

(III) Equação de estado, para gases perfeitos;

$$p = p_0\rho^\gamma. \tag{3.7}$$

Aqui o γ é o expoente politrópico, isto é seus valores são $\gamma = 1$ para processos isotérmicos e $\gamma > 1$ para adiabáticos (VÁZQUEZ, 2007).

Supondo que os parâmetros μ (viscosidade do fluido), ε (porosidade do meio), k (a permeabilidade do meio) e p_0 (pressão de referência) são positivos e constantes, pode-se reduzir as Eq.(3.5), Eq.(3.7) para a seguinte forma (VÁZQUEZ, 2007):

$$\rho t = c\Delta(\rho^m)m, \tag{3.8}$$

com expoente $m = 1 + \gamma$ e

$$c = \frac{\gamma k p_0}{(\gamma + 1)\varepsilon\mu}. \tag{3.9}$$

3.3.2 Transferência de calor não linear

Outra aplicação importante é a propagação de calor com a condutividade térmica dependente da temperatura, a equação geral que define tal processo é dada por (VÁZQUEZ, 2007):

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = div(k\nabla T). \tag{3.10}$$

Em que T é a temperatura, c o calor específico, ρ é a densidade do meio (que pode ser um sólido, fluido ou plasma) e k é a condutividade térmica. Todos esses valores são funções de $x \in \mathbb{R}^3$ e $t > 0$ $t \in \mathbb{R}$ (VÁZQUEZ, 2007).

No caso em que as variações de c, k, e ρ são desprezíveis adquirindo a equação térmica clássica, porém quando o intervalo de variação das temperaturas é muito grande (centenas ou milhares de graus), tal suposição não é muito razoável.

3.3.3 Fluxo de água subterrânea (Equação de Boussinesq)

A seguir um problema relacionado aos líquidos, trata-se da infiltração de um líquido incompressível (geralmente água), através de um meio poroso, em que tem como principal problema, a infiltração de água subterrânea. Este modelo foi desenvolvido pela primeira vez por Boussinesq, em 1903 e está relacionada com a motivação original de Darcy, como foi dito anteriormente.

A equação de Boussinesq é dada por (VÁZQUEZ, 2007):

$$h_t = k(h^2)_{xx}. \tag{3.11}$$

com a constante $k = \rho gk/2m\mu$, sendo um particular caso da equação de difusão num meio poroso com $m = 2$, h é altura da camada, essa é a equação fundamental da infiltração subterrânea.

Quando existe uma entrada de água no meio poroso (por recarga natural ou artificial), ou uma saída (por sumidouros ou bombeamento), a equação assume a forma completa (VÁZQUEZ, 2007):

$$h_t = k\Delta(h^2) + f. \tag{3.12}$$

onde a função $f(x,t)$ reflete esses efeitos conhecido como função fonte ou absorvente (VÁZQUEZ, 2007).

3.4 Difusão não linear fracionária

Nesta seção realizou-se um estudo sistemático sobre a equação de difusão não linear fracionária. Esta equação tem sido aplicada no estudo da difusão fracionária no meio poroso, daí a origem da nomenclatura equação de difusão no meio poroso, usada por diversos pesquisadores. A equação tem por objetivo descrever o comportamento anômalo da difusão associados aos efeitos de memória e distância que são descritos pelas derivadas fracionárias.

Os dois casos que envolvem o comportamento anômalo e os operadores fracionários são: difusão em meio poroso com derivada fracionária não linear temporal e difusão em meio poroso com derivada fracionária não linear espacial.

3.4.1 Difusão em meio poroso com derivada fracionária espacial

Nesta seção objetivou-se verificar os efeitos de distância na equação de difusão fracionária em meio poroso, usando um operador conhecido como Laplaciano fracionário. Este operador é baseado nas derivadas fracionárias de Riesz, definidas a partir dos potenciais de Riesz.

Os potenciais de Riesz, foram definidos por Marcel Riesz (1886-1969), matemático austro-hungaro, nascido em Györ, hoje na Hungria, ele foi criado no ambiente de resolução de problemas do ensino da matemática. Destacou-se neste meio e ganhou a competição Loránd Eötvös em 1904, estudou na Universidade de Budapeste e foi influenciado por Lipót Fejér. Realizou pesquisas sobre problemas da teoria da série. O principal trabalho de Marcel foi na área de análise funcional, as equações diferenciais parciais, física matemática, teoria dos números e álgebra (RIESZ, 1988).

Marcel Riesz propôs uma modificação no núcleo de uma transformação integral, ao estudar potenciais de energia apresentou a transformação do tipo potência. Ao invés do conhecido núcleo de Fourrier, ele acreditava que em alguns fenômenos, como o comportamento (decaimento ou distribuição) não era de ordem exponencial (RIESZ, 1988).

Uma das principais propriedades da derivada fracionária de Riesz é a sua transformada de Fourier definida no capítulo 2.

As soluções de similaridade da equação fracionária espacial em meio poroso baseado na expressão a seguir (HUANG, 2014):

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \Delta^{\alpha/2}u^m(x,t). \tag{3.13}$$

com $1 < \alpha < 2$. As soluções de similaridade estão relacionadas aos grupos de simetria da escala de equações diferenciais parcial, levando esta equação em uma outra variável de similaridade, que é invariante em escala.

Os tipos especiais de perfis de similaridade são proporcionais a $(R^2+|y|^2)^{-q}$ ou $(R^2+|y|^2)_{+q}$, para $R > 0$ e $q > 0$. Com isso a Eq.(3.13) pode ser descrita da seguinte forma $(R^2+|y|^2)^{-1/(1-m)}$ para $m \in \left(\frac{N-2}{N}, 1\right)$ ou $(R^2+|y|^2)^{1/(m-1)}$ para $m > 1$ (HUANG, 2014).

Derivando os perfis de similaridade faz-se uso de algumas propriedades da função hipergeométrica e seus Laplacianos fracionários, mas utiliza-se o principio da conservação das massas para determinar os perfis de Barenblatt (HUANG, 2014). Se $u(x,t)$ é a solução de Eq.(3.13)assim é $T_\lambda u(x,t) = \lambda^{N\beta}u(\lambda^\beta x, \lambda t)$ com

$$\beta = \frac{1}{N(m-1)+2s}. \tag{3.14}$$

Isso implica nas soluções de similaridade da forma $u(x,t) = t^{-N\beta}\Phi(y)$ com $y = xt^-\beta$, onde o perfil de similaridade Φ satisfaz a equação (HUANG, 2014):

$$(-\Delta)^{\alpha}\Phi^{m} = \beta\nabla.(y\Phi). \tag{3.15}$$

Teorema 3.4.1. *Para cada $s \in (0,1)$, a Eq.(3.15) admite solução de similaridade $u(x,t) = t^{-}N\beta\Phi(xt^{-}\beta)$ com perfil especial $\Phi(y) = \lambda(R^2 + |y|^2)^{-q}$ $(q > 0)$ e $\beta = \dfrac{1}{N(m-1)+2s}$ somente quando $m = \dfrac{N+2-2s}{N+2s}$. Correspondente a solução similaridade*

$$u(x,t) = \lambda t^{-N\beta}(R^2 + |xt^{-\beta}|^2)^{-s-N/2}. \tag{3.16}$$

é uma solução clássica em $(0,\infty)\times\mathbb{R}^N$ com $u(x,t) \longrightarrow M\delta(x)$ como $t \longrightarrow 0$ para $M > 0$ (HUANG, 2014). Derivando o perfil Barenblatt, tem-se (HUANG, 2014):

$$(-\Delta)^{s}\Phi(y)^{m} = \lambda^{m}2^{2s}R^{-2-2mq}\frac{\Gamma(mq+s)\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma(mq)\Gamma(\frac{N}{2})}{}_2F_1\left(mq+s, \frac{N}{2}+s; \frac{N}{2}; -\frac{|y|^2}{R^2}\right). \tag{3.17}$$

onde ${}_2F_1\left(mq+s, \dfrac{N}{2}+s; \dfrac{N}{2}; -\dfrac{|y|^2}{R^2}\right)$ é a função hipergeométrica. Por outro lado

$$\nabla.(y\Phi(Y)) = \lambda N R^{-2q}{}_2F_1\left(q, \frac{N}{2}+1; \frac{N}{2}; -\frac{|y|^2}{R^2}\right). \tag{3.18}$$

Como resultado, a Eq.(3.15) reduz-se à identidade

$${}_2F_1\left(mq+s, \frac{N}{2}+s; \frac{N}{2}; -\frac{|y|^2}{R^2}\right) = {}_2F_1\left(q, \frac{N}{2}+1; \frac{N}{2}; -\frac{|y|^2}{R^2}\right), \tag{3.19}$$

e a equação algébrica

$$\lambda^{m}2^{2s}R^{-2-2mq}\frac{\Gamma(mq+s)\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma(mq)\Gamma(\frac{N}{2})} = \beta\lambda N R^{-2q}. \tag{3.20}$$

Com $\dfrac{N}{2}+s \in \dfrac{N}{2}+1$ em Eq.(3.19), então:

$$mq+s = \frac{N}{2}+1, \;\; \frac{N}{2}+s = q. \tag{3.21}$$

ou

$$m = \frac{N+2-2s}{N+2s},\ q = \frac{N}{2} + s. \tag{3.22}$$

Simplificando a Eq.(3.20)

$$\lambda^{1-m} R^{2-2s} \beta = 2^{2s-1} \frac{\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma(\frac{N}{2}+1-s)}. \tag{3.23}$$

Juntamente com a condição de massa total

$$M = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) dy = \lambda \pi^{\frac{N}{2}} R^{-2s} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{N}{2}+s)}. \tag{3.24}$$

sendo que esses parâmetros λ e R são determinados de forma exclusiva (HUANG, 2014). Quando $m = 1$ e $s = 1/2$, o perfil correspondente é o kernel de Poisson. As novas soluções acima podem ser vistas como um ramo contínuo do ponto $s = 1/2$ para todo o intervalo $s \in (0,1)$ (HUANG, 2014).

3.4.2 Difusão em meio poroso com derivada fracionária temporal

O modelo de difusão com derivada fracionária temporal é baseado nos trabalhos de Djordevic e Atanocovic (DJORDJEVIC; ATANACKOVIC, 2008), L.Plocinzak e H Okasinra (PLOCINICZAK, 2013). O primeiro apresenta duas soluções explícitas e uma numérica para investigação do comportamento anômalo, considerando a derivada fracionária no tempo. O segundo artigo desenvolve métodos numéricos e obtém soluções aproximadas que descrevem o comportamento de um problema experimental de difusão como pode ser visto com detalhes em seu artigo (DJORDJEVIC; ATANACKOVIC, 2008).

A equação de difusão fracionária temporal é considerada da seguinte forma:

$$D_t^{\beta} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}[u^m(x,t) \frac{\partial}{\partial x} u(x,t)],\ 0 < \beta \leq 1. \tag{3.25}$$

assim, $u(x,t)$ é a concentração da substância, D_t^{β} representa a derivada fracionária de Riemann-Liouville.

As soluções de similaridade da equação de difusão fracionária temporal da Eq.(3.25), que são definidas como soluções analíticas da forma:

$$u(x,t) = t^a U(\eta), \qquad \eta = xt^{-b}, \tag{3.26}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ aplicando na Eq.(3.25) com as condições iniciais $u(x,0) = 0$. Aplicando a derivada de Riemman-Liouville em Eq.(3.26) tem-se:

$$\begin{aligned} D_t^\beta u(x,t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t-s)^{-\beta} u(x,s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t-s)^{-\beta} s^a U(xs^-b) ds. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Para reescrever a Eq.(3.27) foi realizada a seguinte mudança de variável $\tau = \dfrac{s}{t}$ então:

$$D_t^\beta u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \left[t^{a-\beta+1} \int_0^1 (1-\tau)^{-\beta} \tau^a U(\eta\tau^{-b}) d\tau \right]. \tag{3.28}$$

Para simplificar foi utilizado operador Erdélyi-Kober $F_\beta^{(a,b)}$:

$$F_\beta^{(a,b)} U(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^1 (1-\tau)^{-\beta} \tau^a U(\eta\tau^{-b}) d\tau, \tag{3.29}$$

Então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[t^{a-\beta+1} F_\beta^{(a,b)} U(\eta) \right] &= \frac{\partial}{\partial t} \left(t^{a-\beta+1} \right) F_\beta^{(a,b)} U(\eta) + t^{a-\beta+1} \frac{\partial}{\partial t} \left(F_\beta^{(a,b)} U(\eta) \right), \\ &= (1-\beta+a) t^{a-\beta} F_\beta^{(a,b)} U(\eta) + t^{a-\beta+1} (-b\eta t^{-1}) \frac{d}{d\eta} F_\beta^{(a,b)} U(\eta) \\ &= t^{a-\beta} \left[(1-\beta+a) - b\eta \frac{d}{d\eta} \right] F_\beta^{(a,b)} U(\eta). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Diante disso o lado direito da Eq. (3.25) é da seguinte forma:

$$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} u(x,t) = t^{-2b+(m+1)a} \frac{d}{d\eta} \left(U^m(\eta) \frac{d}{d\eta} U(\eta) \right), \tag{3.31}$$

em que a derivada em relação η na Eq. (3.25), obtendo a seguinte forma:

$$t^{a-\beta} \left[(1-\beta-a) - b\eta \frac{d}{d\eta} \right] F_\beta^{a,b} U(\eta) = t^{-2b+(m+1)a} \frac{d}{d\eta} \left(U^m(\eta) \tfrac{d}{d\eta} U(\eta) \right), \tag{3.32}$$

Impondo a invariância na variável t, se obtém a seguinte relação:

$$\begin{aligned} a-\beta &= -2b+(m+1)a \\ a-\beta &= -2b+am+a \\ \beta-2b+ma &= 0. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Onde tem a seguinte equação:

$$\left((1-\beta-a)-b\eta\frac{d}{d\eta}\right)F_{\beta}^{a,b}U(\eta)=\frac{d}{d\eta}\left(U^{m}(\eta)\frac{d}{d\eta}U(\eta)\right). \tag{3.34}$$

Admitindo a condição obtém-se:

$$a=\frac{\beta-2}{m+2},\ b=\frac{(m+1)\beta-m}{m+2}, \tag{3.35}$$

e pode-se reescrever a Eq.(3.34) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left(-b-b\eta\frac{d}{d\eta}\right)F_{\beta}^{a,b}U(\eta) &= d\frac{d}{d\eta}\left(U^{m}(\eta)\frac{d}{d\eta}U(\eta)\right) \\ \frac{d}{d\eta}\left(-b\eta F_{\beta}^{a,b}U(\eta)\right) &= \frac{d}{d\eta}\left(U^{m}(\eta)\frac{d}{d\eta}U(\eta)\right) \\ \left(-b\eta F_{\beta}^{a,b}U(\eta)\right) &= \left(U^{m}(\eta)\frac{d}{d\eta}U(\eta)\right) \\ b\eta U_{m}(\eta)F_{\beta}^{a,b}U(\eta) &= U'(\eta) \\ U'(\eta) &= R(\eta,U,F_{\beta}^{a,b}). \end{aligned} \tag{3.36}$$

isso implicará em uma equação de primeira ordem.

3.5 Aproximações Numéricas para uma Equação de difusão fracionária não-linear

Para uma solução numérica com problema de difusão não linear fracionário, inicialmente, aplica-se o método de similaridade na equação a seguir:

$$D_t^{\beta}u(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}[u^{m}(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)],\ 0<\beta\leq 1. \tag{3.37}$$

A solução numérica para a equação de difusão não linear, está associada a

Eq.(3.36). Para isso, se faz necessário discretizar o operador fracionário de Erdélyi-Kober (E-K).

3.5.1 Discretização do Operador Erdélyi-Kober

O operador integral fracionário Erdélyi-Kober (E-K) é definido da seguinte forma (PLOCINICZAK; SOBIEZEK, 2017):

$$F_{a,b,c}\, y(x) := \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^t (1-s)^{b-1} s^a y(s^{1/c}x) ds, \ x \in (0, X), \tag{3.38}$$

em que os cálculos numéricos decorre da transformação de $t = s^{1/c}x$ feita na Eq.(3.38), isso leva à representação do operador de Volterra (PLOCINICZAK; SOBIEZEK, 2017).

$$F_{a,b,c}\, y(x) := \frac{cx^{-c(a+b)}}{\Gamma(b)} \int_0^x (x^c - t^c)^{b-1} t^{c(a+1)-1} y(t) dt. \tag{3.39}$$

Para fazer a discretização do operador E-K aplicou-se a regra de quadratura, aproximando a função y e não o resto do integrando. Permitindo realizar uma parte do cálculo minimizando analiticamente o erro de discretização. As regras de quadratura utilizadas são: retangulares, ponto médio e trapezoidal (PLOCINICZAK; SOBIEZEK, 2017).

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n = 1. \tag{3.40}$$

Para tal, $max_i(s_{i+1} - s_i) \to 0$ a medida que a grade é refinada, isto é $n \to \infty$. Neste caso não é necessário discretizar a variável x. Então:

$$F_{a,b,c}\, y(x) := \frac{1}{\Gamma(b)} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{s_i}^{s_i+1} (1-s)^{b-1} s^a y(s^{1/c}x) ds, \tag{3.41}$$

Considerando a seguir algumas formas de aproximar o valor de y em um subintervalo $[s_i - s_{i+1}]$, aplicou-se a regra de quadratura escolhida na função $Y(s) := y(s^{1/b}x)$ para os valores fixos de x e c (PLOCINICZAK; SOBIEZEK, 2017).

1) Regra retangular (PLOCINICZAK; SOBIEZEK, 2017): a cada subintervalo, construir um retângulo aproximado com a altura igual a $Y(s_i)$. Por $L^r_{a,b,c}$ denominando o operador que dá a discretização de $F_{a,b,c}$. Sendo dada da seguinte forma:

$$L^r_{a,b,c}y(x) := \frac{1}{\Gamma(b)}\sum_{i=0}^{n-1} y(s^1/c_i x)\int_{s_i}^{s_i+1}(1-s)^{b-1}s^a ds = \sum_{i=0}^{n-1}\upsilon_i^r(a,b)y(s_i^{1/c}x), \tag{3.42}$$

definindo os seguintes parâmetros:

$$\upsilon_i^r(a,b) := \frac{1}{\Gamma(b)}\int_{s_i}^{s_{i+1}}(1-s)^a s^a ds = \frac{B(s_{i+1};a+1,b)-B(s_i;a+1,b)}{\Gamma(b)}, \tag{3.43}$$

em que $B(s_{i+1};a+1,b)$ é a função beta incompleta (LUKE, 2014). No caso em que $a=0$:

$$\upsilon_i^r(0,b) = \frac{(1-s_i)^b-(1-s_{i-1})^b}{\Gamma((b+1))}. \tag{3.44}$$

2) Regra do ponto médio (PLOCINICZAK; SOBIEZEK, 2017): a altura do retângulo aproximado é $Y(s_{i+1/2})$, onde $(s_{i+1/2}) := (s_{i+1}+s_i)/2$. A discretização da regra do ponto médio é a seguinte:

$$L^m_{a,b,c}\ y(x) := \frac{1}{\Gamma(b)}\sum_{i=0}^{n-1} y(s_{i+1/2}^{1/c}x)\int_{s_i}^{s_i+1}(1-s)^{b-1}s^a ds = \sum_{i=0}^{n-1}\upsilon_i^r(a,b)y(s_{i+1/2}^{1/c}x), \tag{3.45}$$

onde os parâmetros $\upsilon^r(a,b)$, são os mesmos da regra retangular.

3) Regra trapezoidal (PLOCINICZAK; SOBIEZEK, 2017): para a regra trapezoidal, ao aproximar a função Y pelos segmentos de linha, isto é, $Y(s) \approx [(Y(s_{i+1}-Y(s_i)))/(s_{i+1}-s_i)+Y(s_i)$ em $[s_i,s_{i+1})$ (PLOCINICZAK; SOBIEZEK, 2017). Isso dá a seguinte discretização:

$$\begin{aligned} L^t_{a,b,c}\ y(x) \quad &:= \quad \frac{1}{\Gamma(b)}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{y(s_{i+1}^{1/c}x)-y(s_{i+}^{1/c}x)}{s_{i+1}-s_i}\int_{s_i}^{s_i+1}(1-s)^{b-1}s^a(s-s_i)ds \\ &+ \quad y(s_{i+}^{1/c}x)\int_{s_i}^{s_i+1}(1-s)^{b-1}s^a ds \\ &= \quad \sum_{i=0}^{n-1}\upsilon_i^t(a,b)y(s_{i+}^{1/c}x), \end{aligned} \tag{3.46}$$

onde os pesos trapezoidais são definidos por:

$$\upsilon_i^t(a,b) := \begin{cases} B_0, & i=0; \\ A_{i-1}+B_i, & 0<i<n; \\ A_{n-1}, & i=n; \end{cases} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned} A_i &:= \frac{1}{\Gamma(b)} \frac{\delta_i B(a+2,b) - s_i \delta_i B(a+1,b)}{s_{i+1} - s_i}, \\ B_i &:= \frac{1}{\Gamma(b)} \left(\delta_i B(a+1,b) - \frac{\delta_i B(a+2,b) - s_i \delta_i B(a+1,b)}{s_{i+1} - s_i} \right) \end{aligned} \tag{3.48}$$

em que,

$$\delta_i B(a,b) := B(s_{i+1}; a, b) - B(s_i; a, b). \tag{3.49}$$

Ao avaliar as discretizações y em um ponto $s_i^{1/c} x$, que depende do parâmetro c e do intervalo $[0,1]$ (PLOCINICZAK; SOBIEZEK, 2017).

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_i \cdots < t_n = x \tag{3.50}$$

Aplicando para integral E-K na Eq.(3.39),

$$F_{a,b,c}\; y(x) := \frac{cx^{-c(a+b)}}{\Gamma(b)} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_i+1} (c^x - t^c)^{b-1} t^{c(a+1)-1} y(t) dt, \tag{3.51}$$

e aplicando as interpolações na função y.

Regra retangular (PLOCINICZAK; SOBIEZEK, 2017): ao aproximar y em $[y_i, y_{i+1})$ por $y(t_i)$ e obtém-se:

$$K^r_{a,b,c} y(x) := \frac{cx^{-c(a+b)}}{\Gamma(b)} \sum_{i=0}^{n-1} y(t_i) \int_{t_i}^{t_i+1} (x^c - t^c)^{b-1} t^{c(a+1)-1} dt, \tag{3.52}$$

ao aplicar a mudança de variável $s = (t/x)^c$, obtém-se:

$$K^r_{a,b,c} y(x) := \frac{1}{\Gamma(b)} \sum_{i=0}^{n-1} y(t_i) \int_{(t_i/x)^c}^{(t_{i+1}/x)^c} (1-s)^{b-1} s^a ds = \sum_{i=0}^{n-1} w_i^r(a,b,c) y(t_i), \tag{3.53}$$

onde

$$w_i^r(a,b,\alpha) := \frac{B(t_{i+1}/x)^c; a+1, b) - B(t_i/x)^c; a+1, b)}{\Gamma(b)}, \tag{3.54}$$

no caso em que $a = 0$, tem:

$$w_i^r(0,a,b) = \frac{(1 - (t_i/x)^c)^b - (1 - ((t_{i+1}/x)^b))}{\Gamma(b+1)}, \tag{3.55}$$

Regra do ponto médio (PLOCINICZAK; SOBIEZEK, 2017):

$$L^m_{a,b,c}y(x) := \frac{1}{\Gamma(b)}\sum_{i=0}^{n-1} y(t_{i+1/2})\int_{(t_i/x)^c}^{(t_{i+1}/x)^c}(1-s)^{b-1}s^a ds = \sum_{i=0}^{n-1} w^r_i(a,b,c)y(t_{i+1/2}), \quad (3.56)$$

onde os parâmetros são iguais aos da regra retangular dados na Eq.(3.54).

Regra do trapezoidal (PLOCINICZAK; SOBIEZEK, 2017): ao utilizar o polinômio Lagrange de primeira ordem para aproximar $y(x)$ para cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, i.e $y(t) \approx [(y(t_{i+1}) - y(t_i))/(t_{i+1} - t_i)]\,(t - t_i) + y(t_i)$ o que nos dá a quadratura trapezoidal

$$K^t_{a,b,c}y(x) = \sum_{i=0}^{n} w^t_i(a,b,c)y(t_i), \quad (3.57)$$

onde os pesos são definidos por:

$$w^t_i(a,b) := \begin{cases} D_0, & i = 0; \\ C_{i-1} + B_i, & 0 < i < n; \\ C_{n-1}, & i = n \end{cases} \quad (3.58)$$

com

$$\begin{aligned} C_i &:= \frac{1}{\Gamma(b)}\frac{x\Delta_i B(a+1/c+1,b,c) - t_i\Delta_i B(a+1,b,c)}{t_{i+1}-t_i}, \\ B_i &:= \frac{1}{\Gamma(b)}\left(\Delta_i B(a+1,b,c) - \frac{x\Delta_i B(a+1/c+1,b,c) - t_i\Delta_i B(a+1,b,c)}{t_{i+1}-t_i}\right) \end{aligned} \quad (3.59)$$

em que:

$$\Delta_i B(a,b,c) := B((t_{i+1}/x)^c; a, b) - B((t_i/x)^c; a, b). \quad (3.60)$$

Lema 3.5.1. *Para $a, b \in \mathbb{R}$ e $c > 0$ tem-se (PLOCINICZAK; SOBIEZEK, 2017):*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^{a-1}\left(1-\left(\frac{i}{n}\right)^c\right)^{b-1} \sim \begin{cases} \frac{1}{c}B(\frac{a}{c}, c), & a > 0 \ e \ b > 0; \\ ln\ n, & a = 0 \ e \ b > 0; \\ c^{b-1}ln\ n, & a > 0 \ e \ b = 0; \\ \zeta(1-a)n^{-a}, & a < 0 \ e \ b > a; \\ c^{b-1}\zeta(1-b)n^{-b}, & b < 0 \ e \ a > b; \\ (1+c^{a-1})\zeta(1-a)n^{-a}, & a = b < 0, \end{cases} \quad (3.61)$$

como $n \to \infty$, prova em (PLOCINICZAK; SOBIEZEK, 2017).

Lema 3.5.2. *Para $m \geq 1$. Se $-1 < a < m-1$ ou $0 < b < m$, tem-se:*

$$T_n := \frac{1}{n^{k+m}} \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{a,b,c}^{(m)}(\sigma_i) = \begin{cases} 0(n^{-(k+m-1)}), & a > m-1 \ e \ b > m; \\ 0(n^{-(k+\delta-1)}), & -1 < a < m-1 \ ou \ 0 < b > m; \end{cases} \tag{3.62}$$

como $n \to \infty$, onde $\delta := min\{a+1, b\}$ e $\sigma_i \in (\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$. Sendo que $T_n = 0(n^{-(k-1)})$ com $n \to \infty$, prova em (PLOCINICZAK; SOBIEZEK, 2017).

Teorema 3.5.1. *Erro de discretização - Para cada regra de quadratura foram fixados os valores a, b, $c > 0$ sendo que $y \in C^2(0, X)$. Então para um valor fixo $x \in (0, X)$ os erros de discretização correspondem ao operador $F_{a,b,c}$ tem o seguinte comportamento assintótico como $n \to \infty$, logo (PLOCINICZAK; SOBIEZEK, 2017):*

1) Regra Retangular

$$F_{a,b,c}\ y(x) - L_{a,b,c}^r y(x) \sim \frac{x}{c} \frac{y'(\sigma^{1/c}x)}{2\Gamma(b)} \begin{cases} n^{-1} B\left(\frac{1}{c} + a, b\right), & \frac{1}{c} + a > 0; \\ n^{-1} ln\ n, & \frac{1}{c} + a = 0; \\ n^{-(1+\frac{1}{c}+a)} \zeta\left(1 - \frac{1}{c} - a\right), & \frac{1}{c} + a > 0; \end{cases}$$

$$F_{a,b,c}\ y(x) - K_{a,b,c}^r y(x) \sim \frac{1}{n} \frac{X}{2\Gamma(b)} y'(\tau) B(a+1, b). \tag{3.63}$$

2) Regra Trapezoidal

$F_{a,b,c}\ y(x) - L_{a,b,c}^t y(x) \sim$

$$\begin{cases} -\frac{x}{c}\left(\frac{1}{c} - 1\right) \frac{y'(\sigma^{\frac{1}{c}}x)}{12\Gamma(b)} \begin{cases} n^{-2} B\left(\frac{1}{c} + a - 1, b\right), & \frac{1}{c} + a > 0; \\ n^{-1} ln\ n, & \frac{1}{c} + a = 0 \\ n^{-(1+\frac{1}{c}+a)} \zeta\left(2 - \frac{1}{c} - a\right), & \frac{1}{c} + a > 0; \end{cases} \\ -\frac{1}{n^2} \frac{X^2 y''(\sigma x)}{12\Gamma(b)} B(a+1, b); \end{cases}$$

$$F_{a,b,c}\ y(x) - K_{a,b,c}^t y(x) \sim -\frac{1}{n^2} \frac{x^2}{12\Gamma(b)} y'' B(a+1, b). \tag{3.64}$$

3) Regra do Ponto Médio

$$F_{a,b,c}\ y(x) - L^m_{a,b,c}\ y(x) = \begin{cases} O(n^{-2}), & a+\frac{1}{c} > 1\ e\ b \geq 1; \\ O(n^{-2}lnn), & a+\frac{1}{c} = 1\ ou\ b \geq 1; \\ O(n^{-(1+min\{b,a+\frac{1}{c}\})}), & -1 < a+\frac{1}{c} < 1\ ou\ 0 < b < 1 \end{cases} \tag{3.65}$$

$$F_{a,b,c}\ y(x) - K^m_{a,b,c}\ y(x) = \begin{cases} O(n^{-2}), & a+\frac{1}{c} > 1\ e\ b \geq 1; \\ O(n^{-(1+min\{b,a+\frac{1}{c}\})}). & -1 < a+\frac{1}{c} < 1\ ou\ 0 < b < 1 \end{cases} \tag{3.66}$$

Os valores, $\sigma \in (0,1)$ e $\tau \in (0,x)$ dependem dos parâmetros $a,\ b,\ c$ função y e podem ser diferentes para cada discretização.

Prova 3.5.2. *Prova do teorema 1 para a regra retangular: Considerando a discretização retangular do operador $L^r_{a,b,c}$ definido em na Eq.(3.42), aplicando na série de Taylor para $s \in [si, si+1)$ e $\sigma \in (s_i, s_{i+1})$.*

$$y = (s^{\frac{1}{c}}x) = y(s_i^{\frac{1}{c}}x) + \frac{x}{c}\sigma_i^{\frac{1}{c}-1}y'(\sigma_i^{\frac{1}{c}}x)(s-s_i), \tag{3.67}$$

com isso, então:

$$F_{a,b,c}\ y(x) := L^r_{a,b,c}y(x) + R^r, \tag{3.68}$$

onde

$$R^r = \frac{x}{c}\frac{1}{\Gamma(b)}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{s_i}^{s_i+1}\sigma_i^{\frac{1}{c}-1}y'(\sigma_i^{\frac{1}{c}}x)(1-s)^{b-1}s^a(s-s_i)ds. \tag{3.69}$$

Com o valor fixo de i para a seguinte função auxiliar:

$$F(z) := \int_{s_i}^{z}(1-s)^{b-1}s^a(s-s_i)ds. \tag{3.70}$$

Utilizando o teorema do valor médio, e somando as integrais (verifica-se que $(s-s_i)$, sendo que $s \in (s_i, s_{i+1}$ não se altera), logo:

$$R^r = \frac{x}{c}\frac{y'(\sigma_i^{\frac{1}{c}}x)}{\Gamma(b)}\sum_{i=0}^{n-1}\sigma_i^{\frac{1}{c}-1}F(s_{i+1}), \tag{3.71}$$

para $\sigma \in (0,1)$. Ao definir a integral F, sendo feita em termos da função beta, recuperando o comportamento da ordem principal para $n \to \infty$. Desenvolvendo F na série Taylor nota-se que $F(s_i) = F'(s_i) = 0$, com isso foi determinado $s = s_{i+1}$ para $1 \leq i \leq n-1$ então:

$$F(s_{i+1}) = \frac{1}{2}(1-s_i)^{b-1}s_i^a(s_{i+1}-s_i)^2 + \frac{d^2}{ds^2}\left[(1-s)^{b-1}s^a(s-s_i)\right]_{s=\sigma_i}\frac{(s_{i+1}-s_i)^3}{6}. \quad (3.72)$$

Para o ponto intermediário $\sigma_i \in (s_i + s_{i+1})$, pois, $s_{i+1} - s_i = \dfrac{1}{n}$, pelo Lema 3.5.1 tem o primeiro termo na fórmula acima que é $0(n^-2)$ e mostrando que o segundo termo é de ordem superior.Ao desenvolver a derivada para obter:

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[\gamma_{a,b,c}(S)(S-S_i)\right]_{s=\sigma_i}\frac{1}{6n^3} = \left(\gamma''_{a,b,c}(\sigma_i)(\sigma_i - s_i) + 2\gamma'_{a,b,c}(\sigma_i)\right)\frac{1}{6n^3}, \quad (3.73)$$

em que, $\gamma_{a,b,c} := (1-s^c)^{b-1}s^a$, $s \in (0,1)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $c > 0$, multiplicando por $\sigma_i^{\frac{1}{c}-1}$ e somando $1 \leq i \leq n-1$ tem:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{6n^3}\sum_{i=0}^{n-1}\sigma_i^{\frac{1}{c}-1}\frac{d^2}{ds^2}\left[\gamma_{a,b,c}(S)(S-S_i)\right]_{s=\sigma_i}\right| \quad &\leq \quad \frac{1}{6n^4}\sum_{i=0}^{n-1}\sigma_i^{\frac{1}{c}-1}|\gamma''_{a,b,c}(\sigma_i)| + \\ &+ \quad \frac{2}{6n^3}\sum_{i=0}^{n-1}\sigma_i^{\frac{1}{c}-1}|\gamma'_{a,b,c}(\sigma_i)|. \quad (3.74)\end{aligned}$$

De acordo com o Lema 3.5.2, no lado direito tem $(n-1)$ (com $k=2$, $m=2$ e $m=1$ para a primeira e segunda soma, respectivamente). Em consequência disso a partir do restante da Eq.(3.72), concluí que:

$$R^r \sim \frac{x}{c}\frac{y'(\sigma^{1/c}x)}{2\Gamma(b)}\begin{cases} n^{-1}B\left(\frac{1}{c}+a, b\right), & \frac{1}{c}+a > 0; \\ n^{-1}ln\ n, & \frac{1}{c}+a = 0; \\ n^{-(1+\frac{1}{c}+a)}\zeta\left(1-\frac{1}{c}-a\right), & \frac{1}{c}+a > 0; \end{cases}$$

onde o Lema 3.5.1 foi usado na determinação da forma assintótica da série (o termo $i=0$ em Eq.(3.71) desaparece devido à convergência de integral).

O erro de discretização para o segundo método (Eq.3.53) pode ser obtido em uma situação. No segundo momento do operador $F_{a,b,c}$ (Eq.3.51) substitui y em $t = t_i$, para a *série de Taylor obter:*

$$\begin{aligned} F_{a,b,c}y(x) &= K^r_{a,b,c}y(x) + \frac{cx^{-c(a+b)}}{\Gamma(b)} \sum_{i=0}^{n-1} y'(\tau_i) \int_{t_i}^{t_i+1} (x^c - t^c)^{b-1} t^{c(a+1)-1}(t-ti)dt \\ &= K^r_{a,b,c}y(x) + P^r, \end{aligned} \tag{3.75}$$

onde o teorema do valor médio e definir o restante em P^r. Introduzindo a função auxiliar:

$$G(z) := \int_{t_i}^{z} (x^c - t^c)^{b-1} t^{c(a+1)-1}(t-ti)dt, \tag{3.76}$$

substituindo na série de Taylor-Lagrange em $t = t_i$ e avaliado em $t = t_{i+1}$

$$G(t_{i+1}) = (x^c - t_i^c)^{b-1} t_i^{c(a+1)-1} \frac{x^2}{2n^2} + \frac{d^2}{dt^2} \left[(x^c - t^c)^{(b-1)} t^{c(a+1)-1}(t-t_i)\right] |_{t=\tau_i} \frac{x^3}{6n^3}, \tag{3.77}$$

usando $t_{i+1} - t_i = x/n$. Logo tem:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left[(x^c - t^c)^{(b-1)} t^{c(a+1)-1}(t-t_i)\right] |_{t=\tau_i} &= x^{2(1-c)+c(b-a)} \frac{d^2}{dt^2} \\ &\times \left[\gamma c(a+1) - 1, b, c\left(\tfrac{t}{x}\right)\left(\tfrac{t}{x} - \tfrac{t_i}{x}\right)\right]_{t=\tau_i}, \end{aligned} \tag{3.78}$$

e $i/n \leq t/x < (i+1)/n$ portanto, pelo Lema 3.5.2, mostrando que o segundo termo é derivada de ordem superior ao primeiro. Inserindo a equação acima na definição de P^r, logo:

$$P^r \sim \frac{1}{n} \frac{x}{2\gamma(b)} y'(\tau) B(a+1, b), \tag{3.79}$$

com $n \longrightarrow \infty$. Finalizando a prova para a regra retangular (PLOCINICZAK; SOBIEZEK, 2017).

Observe que a discretização realizada por L é sempre inferior ao operador K, que é evidente ao valor c, isso para as regras retangulares e trapezoidal que perdem a taxa de convergência para $c - 1 + a < 0$ ou $c - 1 + a < 1$, respectivamente. Além disso, a regra do ponto médio sofre de uma singularidade do núcleo, mesmo para a discretização do K. Ou seja, ela (regra do ponto médio), perde sua taxa de convergência se $0 < b < 1$. No entanto, a maior vantagem desse método reside na simplicidade inquestionável da implementação. Logo em seguida é apresentado um corolário do Teorema 3.5.1. A partir da inspeção de sua prova, pode-se observar que a continuidade das derivadas de y implica em limites em $[0, X]$. Isso nos permite escrever limites uniformes para os erros.

Corolário 3.5.3. *Os valores a, b, c são fixos, com isso foi definido que $y \in C^2(0, X)$. O valor de M é denominado comum para y' e y'', i.e $|y'(x)| \leq M$ e $y''(x)| \leq M$ para $x \in (0, X)$. A seguir têm os seguintes limites uniformes sobre os erros de discretização, para as regras de quadratura: retangular e trapezoidal (PLOCINICZAK; SOBIEZEK, 2017).*

1) Regra Retangular

$$|F_{a,b,c}\ y(x) - L^r_{a,b,c}\ y(x)| \leq \frac{x}{c}\frac{M}{2\Gamma(b)}\begin{cases} n^{-1}B\left(\frac{1}{c}+a, b\right), & \frac{1}{c}+a>0; \\ n^{-1}lnn, & \frac{1}{c}+a=0; \\ n^{-(1+\frac{1}{c}+a)}\zeta\left(1-\frac{1}{c}-a\right), & \frac{1}{c}+a>0; \end{cases} \tag{3.80}$$

$$|F_{a,b,c}\ y(x) - K^r_{a,b,c}\ y(x)| \leq \frac{1}{n}\frac{X}{2\Gamma(b)}MB(a+1,b). \tag{3.81}$$

2) Regra Trapezoidal

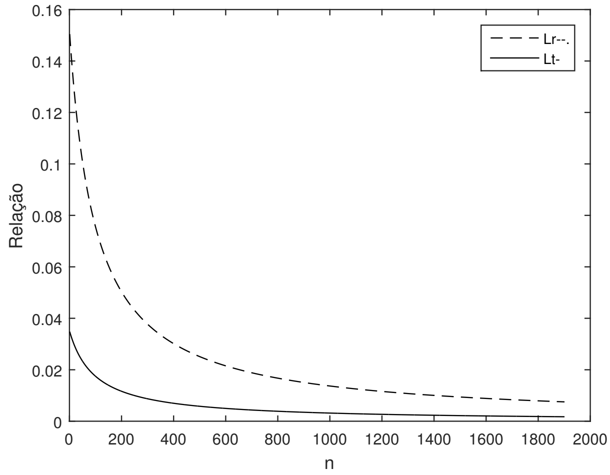
$$|F_{a,b,c}\ y(x) - L^t_{a,b,c}\ y(x)| \leq \begin{cases} \frac{x}{c}\left(\frac{1}{c}-1\right)\frac{M}{12\Gamma(b)}\begin{cases} n^{-2}B\left(\frac{1}{c}+a-1, b\right), & \frac{1}{c}+a>0; \\ n^{-1}lnn, & \frac{1}{c}+a=0;\ c\neq 1; \\ n^{-(1+\frac{1}{c}+a)}\zeta\left(2-\frac{1}{c}-a\right), & \frac{1}{c}+a>0; \end{cases} \\ \frac{1}{n^2}\frac{X^2M}{12\Gamma(b)}B(a+1,b), & c=1 \end{cases}$$

$$|F_{a,b,c}\ y(x) - K^t_{a,b,c}\ y(x)| \leq \frac{1}{n^2}\frac{X}{2\Gamma(b)}MB(a+1,b). \tag{3.82}$$

Algumas simulações foram feitas para mostrar numericamente o teorema, com isso verificou-se a constante de erro para as regras trapezoidais e retangulares. Utilizando $y(x) = x$ no primeiro momento e $y(x) = x$ ou $y(x) = x^2/2$ para o último, essas funções foram escolhidas, por que apresentam uma derivada constante independentemente do ponto em que é avaliada. As Fig.(3.1) e Fig.(3.2), mostram esse resultado. Os gráficos representam a seguinte proporção como uma função de n diferente para cada uma das discretizações. Por exemplo:

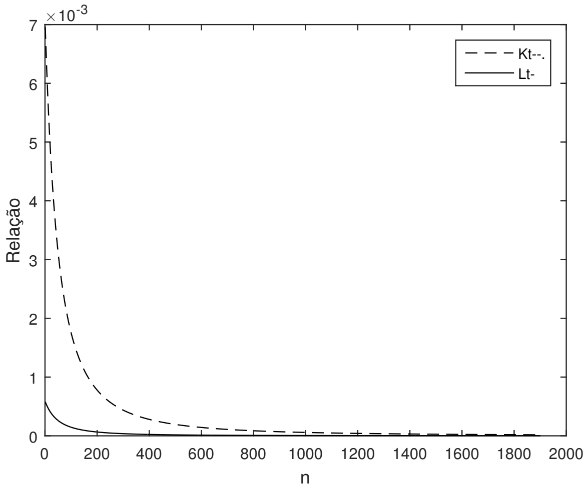
$$\frac{|F_{a,b,c}\ y(x) - K^t_{a,b,c}\ y(x)|}{\frac{x}{2\Gamma(b)n}B(a+1,b)}, \tag{3.83}$$

Figura 3.1: Relação da Regra Retangular



Para a regra Retangular utiliza-se os seguintes parâmetros $a = 0.5$, $b = 1.5$ e $c = 0.5$ e $X = 1$, em função de n, onde a relação utilizada foi as Eq.(3.80) e Eq.(3.81).

Figura 3.2: Relação da Regra Trapezoidal.



Para a regra Trapezoidal faz o uso dos seguintes parâmetros $a = 0.5$, $b = 1.5$ e $c = 0.5$ e $X = 1$, em função de n, onde a relação utilizada foi as Eq(3.82) e Eq(3.82). Em geral as expressões acima devem se aproximar de 1 para n grande.

3.5.2 Solução numérica para equação de difusão fracionária não linear

Considerando a equação integro-diferencial Eq.(3.36) (PLOCINICZAK; SOBIEZEK, 2017):

$$y' = f(x, y, F_{a,b,c}y), \; y(0) = y_0, \quad x \in (0, X). \tag{3.84}$$

sendo que a função f é Lipschitziana contínua em relação ao terceiro e segundo argumento, isto é

$$|R(x,u,p) - f(x,v,p) \leq L_1|u-v|, \quad |f(x,u,p) - f(x,v,q) \leq L_2|p-q|, \tag{3.85}$$

para algumas constantes $L_{1,2} > 0$. Para provar os resultados a condição de regularidade em f tem que ser considerada, ou seja,

$$f \in C^2(\mathbb{R}^3). \tag{3.86}$$

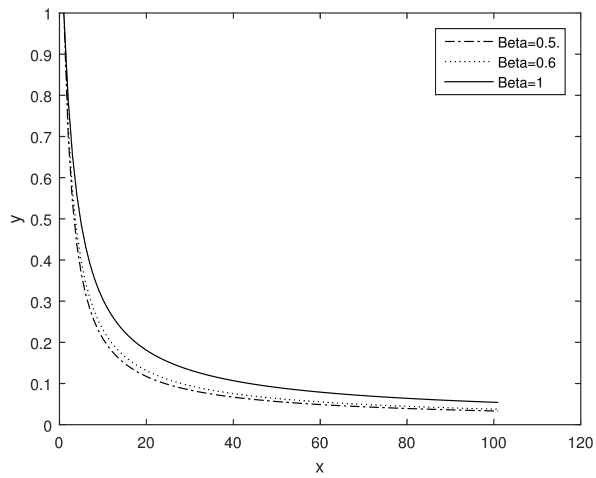
que será necessário para usar estimativas no erro de discretização da quadratura trapezoidal. Verifica-se que Eq.(3.85) implica em Eq.(3.86). Para encontrar uma solução numérica da Eq.(3.36), tem-se o seguinte esquema de diferenças finitas que associa com a discretização de $F_{a,b,c}$ quanto a equação integro-diferencial,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n, K^t_{a,b,c}y_n) + R(x_{n+1}, y_{n+1}, K^t_{a,b,c}y_{n+1})), \tag{3.87}$$

Dessa forma, o operador de discretização $K^t_{a,b,c}$ foi definido em Eq.(3.57). A grade uniforme $x_n = nh$, onde $h = X/N$ para $0 \leq x \leq X$ e $N \in \mathbb{N}$. Além disso, as aproximações numéricas são definidas como usual $y_n \approx y(x_n)$, onde é a solução de Eq.(3.36).

A ilustração Fig.(3.3) mostra a interpretação de geométrica do que foi explicado, sendo que o método trapezoidal foi utilizado com os seguintes parâmetros, $a = 0.5$, $b = 0.5$, $\beta = 0.5, 0.6, 1$.

Figura 3.3: Esboço que ilustra o Regra Trapezoidal.



Teorema 3.5.4. *(Erro de Trucamento) Suponha que R satisfaz Eq.(3.86) para $x \in [0, X]$.*

Então, para $a > -1$ e $b > 0$ e $c > 0$, o erro de truncamento local para o método diferenças finitas da Eq.(3.87) é $O(h^3)$ como $h \to 0$ (PLOCINICZAK; SOBIEZEK, 2017).

Além do erro de trucamento, observa-se que o método numérico da Eq.(3.87) é convergente para a solução exata integro-diferencial Eq.(3.36), sendo convergente para $b \geq 1$.

Teorema 3.5.5. *(Convergência) Suponha que f satisfaça a Eq.(3.86) para $x \in [0, X]$. Então, para $a > -1$, $b \geq 1$ e $c > 0$, o método de diferenças finitas Eq.(3.87) é convergente de segunda ordem isto, é, (PLOCINICZAK; SOBIEZEK, 2017)*

$$|y(x_n) - y_n| = O(h^2) \text{ as } h \to 0 \text{ com } nh = const. \tag{3.88}$$

4

Difusão Fracionária não-linear com reação e convecção

Neste capítulo, realizou-se um estudo sistemático de difusão não linear fracionária e soluções do tipo ondas viajantes, com propagação finita. Estas vêm sendo aplicadas em diversas áreas tais como: Infiltração de águas subterrâneas no solo, transporte anômalo em sistema desordenado, processos não markivianos envolvendo proteínas, transporte de gases num meio poroso, padrões por colônias bacterianas, transferência de calor, combustão, reação química, dinâmica do fluido, física de plasma. No processo de difusão foi associado mais dois fenômenos: convecção e reação. Ambos importantes, pois em geral aparecem de forma natural associados a esse tipo de processo (GILDING; KERSNER, 2012).

4.1 Difusão fracionária não-linear com reação e convecção

Gilding e Kersner apresentam em seu livro (GILDING; KERSNER, 2012) um estudo sobre soluções do tipo ondas viajantes com propagação finita, para equação de difusão com convecção e reação de ordem inteira apresentando uma série de soluções analíticas para o problema. Elas estão diretamente associadas as potências que aparecem na função incógnita nos termos correspondentes a cada fenômeno.

A equação de difusão fracionária proposta nas derivadas fracionárias de Grünwald-Letinikov e Riesz Feller, define a equação de difusão fracionária não linear com reação-convecção:

$$ {}_tD^{\beta}_{\theta}u(x,t) = {}_xD^{\alpha}_{\theta_1}u^m(x,t) + \lambda_1 {}_xD^{\gamma}_{\theta_2}u^n(x,t) + \lambda_2 u^p(x,t), \quad m > 1, \text{e } \lambda_1, \lambda_2, p \in \mathbb{R}. \tag{4.1} $$

onde ${}_tD^{\beta}_{\theta}$ é a derivada fracionária de Grünwald-Letinikov, com $0 < \beta < 1$, $\theta \in \{0, \pi\}$ e ${}_xD^{\alpha}_{\theta_1}, {}_xD^{\gamma}_{\theta_2}$ são as derivadas fracionária de Riesz Feller, com $1 < \alpha < 2$, $0 < \gamma < 1$, ${}_xD^{\alpha}_{\theta_1}u^m(x,t)$ o termo representa a difusão não-linear, ${}_xD^{\gamma}_{\theta_2}u^n(x,t)$ é o termo convectivo e $u^p(x,t)$ é o temo reativo ($\lambda_2 > 0$ termo fonte ou $\lambda_2 < 0$ termo de absorção). Para recuperar a equação clássica $\theta_1 \to 0$ e $\theta_2 \to 1$. A equação de difusão fracionária não-linear com reação-convecção é a seguinte:

$$ {}_tD_\theta^\beta u(x,t) = {}_xD_0^\alpha u^m(x,t) + \lambda_1 {}_xD_1^\gamma u^n(x,t) + \lambda_2 u^p(x,t). \tag{4.2}$$

Assim, ${}_xD_0^\alpha = D_x^\alpha$ é a derivada fracionária de Riesz.

Recuperando o caso de ordem inteira clássica da equação, quando $\beta \to 1$, $\alpha \to 2$ e $\gamma \to 1$. Muitas aplicações emergem desta equação. Por exemplo, citando a equação num meio poroso considerando $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, cujo, caso particular é a equação de Bousnesq ($m = 2$), que aparece em problemas de hidrologia. Outros modelos importantes são descritos nas equações difusão-convecção ($\lambda_2 = 0$) e difusão-reação ($\lambda_1 = 0$).

4.2 Ondas viajantes

As soluções do tipo ondas viajantes com propriedade de escala na variável espacial x, ou seja, $g(x \pm ct) = x^a g(1 \pm c\frac{t}{x})$, onde c é velocidade de onda e a é associado ao grau de homogeneidade. Assim, introduzindo $u(x,t)$ na forma:

$$u(x,t) = x^a U(\eta), \qquad \eta = 1 \pm c\frac{t}{x}, \text{ e } x \neq 0. \tag{4.3}$$

onde a é um parâmetro a ser determinado.

A derivada de Grünwald-Letnikov de $u(x,t)$ tem-se:

$$\begin{aligned}
{}_tD_\theta^\beta u(x,t) &= {}_tD_\theta^\beta \left[x^a U\left(1 \pm c\frac{t}{x}\right)\right] \\
&= x^a e^{-i\theta\beta} \lim_{|h|\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \begin{pmatrix}\beta \\ k\end{pmatrix} U\left(1 \pm \frac{c(t-kh)}{x}\right)}{|h|^\beta} \\
&= x^a e^{-i\theta\beta} \lim_{|h|\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \begin{pmatrix}\beta \\ k\end{pmatrix} U\left(1 \pm \frac{ct}{x} - \frac{k(\pm c)h}{x}\right)}{|h|^\beta} \\
&= x^{a-b}(\pm c)^\beta e^{-i\theta\beta} \lim_{|\nu|\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \begin{pmatrix}\beta \\ k\end{pmatrix} U(\eta - k\nu)}{|\nu|^\beta}, \text{ com } \frac{(\pm c)h}{x} \\
&= (\pm c)^\beta x^{a-\beta} {}_\eta D_\theta^\beta U(\eta).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

A derivada fracionária de Riesz de $u(x,t)$ é:

$$
\begin{aligned}
D_x^\alpha u^m(x,t) &= D_x^\alpha[x^{am}U^m(1\pm c\frac{t}{x})] = d_\alpha\left[x^{am}U^m\left(1\pm c\frac{t}{x}\right)\right] * |x|^{-\alpha-1}\\
&= d_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} s^{am}U^m\left(1\pm c\frac{t}{s}\right)|x-s|^{-\alpha-1}ds\\
&= d_\alpha\left[\int_x^{+\infty}(s-x)^{-\alpha-1}s^{am}U^m\left(1\pm c\frac{t}{s}\right)ds + \int_{-\infty}^{x}(x-s)^{-\alpha-1}s^{am}U^m\left(1\pm c\frac{t}{s}\right)ds\right].
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

As integrais são dadas a seguir:

$$
\int_{-\infty}^{x}(x-s)^{-\alpha-1}s^{am}U^m\left(1\pm c\frac{t}{s}\right)ds.
\tag{4.6}
$$

Aplicando na nova variável $\tau = 1\pm\frac{ct}{s}$ na Eq.(4.6), tem-se:

$$
\begin{aligned}
&\tau = 1\pm\frac{ct}{s}\\
&\tau \longrightarrow 1 \text{ quando } s\longrightarrow -\infty\\
&\tau \longrightarrow \eta \text{ quando } s\longrightarrow x\\
&s = (\tau-1)^{-1}(\pm ct) = (-1)^{-1}(1-\tau)^{-1}(\pm ct)\\
&(x-s) = (-1)^{-1}(\pm ct)[(1-\eta)^{-1}-(1-\tau)^{-1}] = \frac{x(\eta-\tau)}{1-\tau}\\
&ds = \frac{(-1)(\pm ct)}{(1-\tau)^2}d\tau.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Assim, a Eq.(4.6) recebe:

$$
\begin{aligned}
&\int_1^\eta \frac{x^{-1-\alpha}(\eta-\tau)^{-1-\alpha}}{(1-\tau)^{-1-\alpha}}(-1)^{-am}(1-\tau)^{-am}(\pm ct)^{am}U^m(\tau)\frac{(-1)(\pm ct)}{(1-\tau)^2}d\tau\\
&= (-1)^{1-am}x^{-1-\alpha}\int_1^\eta(\eta-\tau)^{-1-\alpha}(1-\tau)^{-1+\alpha-am}(\pm ct)^{1+am}U^m(\tau)d\tau\\
&= (-1)^{1-am}x^{-1-\alpha}\int_1^\eta(\eta-\tau)^{-1-\alpha}(1-\tau)^{-1+\alpha-am}(-1)^{1+am}x^{1+am}(1-\eta)^{1+am}U^m(\tau)d\tau\\
&= x^{am-\alpha}(1-\eta)^{1+am}\int_1^\eta(\eta-\tau)^{-1-\alpha}(1-\tau)^{-1+\alpha-am}U^m(\tau)d\tau.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Da mesma forma obtendo:

$$\int_x^{+\infty}(s-x)^{-\alpha-1}s^{am}U^m\left(1\pm c\frac{t}{s}\right)ds$$
$$=(-1)^\alpha x^{am-\alpha}(1-\eta)^{1+am}\int_1^\eta(\eta-\psi)^{-1-\alpha}(1-\psi)^{-1+\alpha-am}U^m(\psi)d\psi. \qquad (4.9)$$

A derivada fracionária de Riesz-Feller é dada por:

$$D_x^\alpha u^m(x,t)=d_\alpha[1+(-1)^{-\alpha}]x^{am-\alpha}(1-\eta)^{1+am}\int_1^\eta(\eta-\psi)^{-1-\alpha}(1-\psi)^{-1+\alpha-am}U^m(\psi)d\psi. \qquad (4.10)$$

Calculando a derivada fracionária de Riesz tem-se: ${}_xD_1^\gamma u(x,t)$ é dada por:

$${}_xD_1^\gamma u^n(x,t)=\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\pi}\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)\left\{\int_0^\infty\frac{u^n(x+\xi,t)}{\xi^{1+\gamma}}d\xi-\int_0^\infty\frac{u^n(x-\xi,t)}{\xi^{1+\gamma}}d\xi\right\}$$
$$=\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\pi}\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)\left\{\int_x^\infty\frac{u^n(s,t)}{(s-x)^{1+\gamma}}ds-\int_{-\infty}^x\frac{u^n(s,t)}{(x-s)^{1+\gamma}}ds\right\}. \qquad (4.11)$$

Portanto,

$${}_xD_1^\gamma u^n(x,t)={}_xD_1^\gamma[x^{an}U^n(1\pm c\frac{t}{x})]=$$
$$=\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\pi}\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)\left[\int_x^{+\infty}(s-x)^{-\gamma-1}s^{an}U^n\left(1\pm c\frac{t}{s}\right)ds\right.$$
$$\left.-\int_{-\infty}^x(x-s)^{-\gamma-1}s^{an}U^n\left(1\pm c\frac{t}{s}\right)ds\right]$$
$$=\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\pi}\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)[(-1)^{-\gamma}-1]x^{an-\gamma}(1-\eta)^{1+an}\int_1^\eta(\eta-\psi)^{-1-\gamma}(1-\psi)^{-1+\gamma-an}U^n(\psi)d\psi. \qquad (4.12)$$

Substituindo, Eq.(4.4), Eq.(4.10) e Eq.(4.12) em Eq(4.1)

$$(\pm c)^\beta x^{a-\beta}{}_\eta D_\theta^\beta U(\eta)$$
$$=d_\alpha[1+(-1)^{-\alpha}]x^{am-\alpha}(1-\eta)^{1+am}\int_1^\eta(\eta-\psi)^{-1-\alpha}(1-\psi)^{-1+\alpha-am}U^m(\psi)d\psi$$
$$+\lambda_1\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\pi}\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)[(-1)^\gamma-1]x^{an-\gamma}(1-\eta)^{1+a}\int_1^\eta(\eta-\psi)^{-1-\gamma}(1-\psi)^{-1+\gamma-a}U(\psi)d\psi$$
$$+\lambda_2x^{ap}U^p(\eta). \qquad (4.13)$$

Impondo a invariante na variável x:

$$a - \beta = am - \alpha = an - \gamma = ap. \tag{4.14}$$

Tem-se,

$$\begin{aligned}
&(\pm c)^{\beta}{}_{\eta}D^{\beta}_{\theta}U(\eta)\\
&= -d_{\alpha}[1+(-1)^{-\alpha}](1-\eta)^{1+am}\int_{\eta}^{1}(\eta-\psi)^{-1-\alpha}(1-\psi)^{-1+\alpha-am}U^{m}(\psi)d\psi\\
&-\lambda_1\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\pi}\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)[(-1)^{-\gamma}-1](1-\eta)^{1+an}\int_{\eta}^{1}(\eta-\psi)^{-1-\gamma}(1-\psi)^{-1+\gamma-an}U^{n}(\psi)d\psi+\lambda_2U^{p}(\eta).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

4.3 Solução de similaridade

Nesta seção mostrou-se a solução do tipo monotônica, conhecida como frente onda ou propagação infinita, sendo que esse tipo de solução aparece em várias aplicações (DJORDJEVIC; ATANACKOVIC, 2008), (COSTA; PEREIRA 2017), (COSTA et.al, 2017), (GILDING; KERSNER, 2012):

$$U(\eta) = \begin{cases} A\eta^{k}, & \eta < 0 \\ 0, & \eta \geq 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

onde A e k são valores desconhecidos. Para determinar as variáveis de A e k, assumindo a derivada de Grunwald-Letinikov no sentido oposto ($\theta = \pi$) na Eq.(4.15). Observa-se que:

$${}_{\eta}D^{\beta}_{b}U(\eta) = {}_{\eta}D^{\beta}_{b}[A\eta^{k}] = (-1)^{\beta}\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-\beta)}A\eta^{k-\beta}, \tag{4.17}$$

e

$$\begin{aligned}
&(1-\eta)^{1+am}\int_{1}^{\eta}(\eta-\psi)^{-1-\alpha}(1-\psi)^{-1+\alpha-am}U^{m}(\psi)d\psi\\
&= (1-\eta)^{1+am}\int_{0}^{\eta}(\eta-\psi)^{-1-\alpha}(1-\psi)^{-1+\alpha-am}A^{m}\psi^{km}d\psi\\
&= \eta^{km-\alpha}(1-\eta)^{1+am}A^{m}(-1)\int_{0}^{1}(1-\mu)^{-1-\alpha}(1-\eta\mu)^{-1+\alpha-am}\mu^{km}d\mu\\
&= A^{m}\eta^{km-\alpha}(1-\eta)^{1+am}\frac{(-1)\Gamma(-\alpha)\Gamma(1+km)}{\Gamma(1-\alpha+km)}{}_{2}\\
&{}_{2}F_{1}(1-\alpha+am, 1+km; 1-\alpha+km; \eta).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

onde ${}_2F_1$ é a função hipergeométrica de Gauss.

Substituíndo o resultado da Eq.(4.15) e obtendo a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\beta}\frac{(\pm c)^{\beta}\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-\beta)}A\eta^{k-\beta}\\
&= -d_{\alpha}[1+(-1)^{-\alpha}]A^{m}\eta^{km-\alpha}\\
&\times(1-\eta)^{1+am}\frac{(-1)\Gamma(-\alpha)\Gamma(1+km)}{\Gamma(1-\alpha+km)}\ {}_2F_1(1-\alpha+am,\ 1+km;\ 1-\alpha+km;\eta)\\
&-\lambda_1\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\pi}\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)[(-1)^{-\gamma}-1]A^{n}\eta^{kn-\gamma}\\
&\times(1-\eta)^{1+an}\frac{(-1)\Gamma(-\gamma)\Gamma(1+kn)}{\Gamma(1-\gamma+kn)}\ {}_2F_1(1-\gamma+an,\ 1+kn;\ 1-\gamma+kn;\eta)+\lambda_2A^{p}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Para as condições $k = a$ tem Eq.(4.19) é a invariante na variável η:

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\beta}\frac{(\pm c)^{\beta}\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-\beta)}A = -d_{\alpha}[1+(-1)^{-\alpha}]A^{m}\frac{(-1)\Gamma(-\alpha)\Gamma(1+km)}{\Gamma(1-\alpha+km)}+\\
&-\lambda_1\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\pi}\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)[(-1)^{-\gamma}-1]A^{n}\frac{(-1)\Gamma(-\gamma)\Gamma(1+kn)}{\Gamma(1-\gamma+kn)}+\lambda_2A^{p}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Simplificando a Eq.(4.20), obtém a equação algébrica:

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\beta}\frac{(\pm c)^{\beta}\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-\beta)}A\\
=&\frac{\Gamma(1+km)}{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma(1-\alpha+km)}A^{m}-\lambda_1\frac{i\Gamma(1+kn)}{\exp(i\gamma\pi/2)\Gamma(1-\gamma+kn)}A^{n}+\lambda_2A^{p}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

4.4 Soluções explícitas

4.4.1 Equação de difusão fracionária não linear com reação e convecção espacial-temporal

Nesta seção foi apresentado algumas soluções explícitas da Eq.(4.1), incluindo os casos de ordem inteira.

Para $n = 1$ e a relação $m + p = 2$ em Eq.(4.19), obtém-se seguinte equação:

$$\frac{(-1)^{\beta}(\pm c)^{\beta})\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-\beta)}A = \frac{\Gamma(1+km)}{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma(1-\alpha+km)}A^{m}-\frac{\lambda_1 i\Gamma(1+k)}{\exp(i\gamma\pi/2)\Gamma(1-\gamma+k)}A+\lambda_2A^{p}. \tag{4.22}$$

Note que $m + p = 2 \Rightarrow m - p = 2(1 - p)$ e $\gamma = \beta$, esta equação é estabelecida através da Eq.(4.14), então considerando o caso não linear.

$$\frac{(\mp c)^{\beta}\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-\beta)}A^{1-p} = \frac{\Gamma(1+km)}{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma(1-\alpha+km)}A^{2(1-p)} - \frac{\lambda_1 i\Gamma(1+k)}{\exp(i\gamma\pi/2)\Gamma(1-\gamma+k)}A^{1-p} + \lambda_2. \tag{4.23}$$

Substituindo $\Theta = A^{1-p}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{(\mp c)^{\beta}\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-\beta)}\Theta = \frac{\Gamma(1+km)}{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma(1-\alpha+km)}\Theta^2 - \frac{\lambda_1 i\Gamma(1+k)}{\exp(i\beta\pi/2)\Gamma(1-\beta+k)}\Theta + \lambda_2 \\
&\times \frac{\Gamma(1+km)}{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma(1-\alpha+km)}\Theta^2 - \frac{\left[\dfrac{\lambda_1 i}{\exp(i\beta\pi/2)} + (\mp c)^{\beta}\right]\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-\beta)}\Theta + \lambda_2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\left(\dfrac{\lambda_1 i}{\exp(i\beta\pi/2)} + (\mp c)\right)^2 \Gamma^2(1+k)}{\Gamma^2(1+k-\beta)} - \frac{4\lambda_2\Gamma(1+km)}{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma(1-\alpha+km)} \\
\Theta &= \frac{\left(\frac{\lambda_1 i}{\exp(i\beta\pi/2)} + (\mp c)^{\beta}\right)\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-\beta)} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda_1 i}{\exp(i\beta\pi/2)} + (\mp c)^{\beta}\right)^2 \frac{\Gamma^2(1+k)}{\Gamma^2(1+k-\beta)} - \frac{4\lambda_2\Gamma(1+km)}{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma(1-\alpha+km)}}}{2\dfrac{\Gamma(1+km)}{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma(1-\alpha+km)}} \\
\Theta &= \frac{\Gamma(1+k)\exp(i\alpha\pi/2)}{2\Gamma(1+km)} \\
&\times \left[\left(\frac{\lambda_1 i}{\exp(i\beta\pi/2)} + (\mp c)^{\beta}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda_1 i}{\exp(i\beta\pi/2)} + (\mp c)^{\beta}\right)^2 - \frac{4\lambda_2\Gamma(1+km)\Gamma(1+k-\beta)}{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma^2(1+k)}}\right].
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Agora $A^{1-p} = A^{m-1} = \Theta \Rightarrow A = \Theta^{\frac{1}{m-1}}$, usando a condição $m+p$. Substituindo este na Eq.(4.3):

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= x^a.A\eta^k = Ax^{\frac{\alpha-\beta}{m-1}}\left(1 \pm \frac{ct}{x}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{m-1}} = \left[\Theta(x \pm ct)^{\alpha-\beta}\right]^{\frac{1}{m-1}} \\
&= \left\{\frac{\Gamma(1+k)\exp(i\alpha\pi/2)}{2\Gamma(1+km)}\left(\frac{\lambda_1 i}{\exp(i\beta\pi/2)} + (\mp c)^\beta\right) \times \right. \\
&\left. \times \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\lambda_2\Gamma(1+km)\Gamma(1+k-\beta)}{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma^2(1+k)\left(\frac{\lambda_1 i}{\exp(i\beta\pi/2)} + (\mp c)^\beta\right)^2}}\right)(x \pm ct)^{\alpha-\beta}\right\}^{\frac{1}{m-1}} \\
u(x,t) &= \left\{\frac{\Gamma(1+k)\exp(i\alpha\pi/2)}{2\Gamma(1+km)} \times \left[\left(\frac{\lambda_1 i}{\exp(i\beta\pi/2)} + (\mp c)^\beta\right) \pm \right.\right. \\
&\left.\left. \pm\sqrt{\left(\frac{\lambda_1 i}{\exp(i\beta\pi/2)} + (\mp c)^\beta\right)^2 - \frac{4\lambda_2\Gamma(1+km)\Gamma(1+k-\beta)}{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma^2(1+k)}}\right](x \pm ct)^{\alpha-\beta}\right\}^{\frac{1}{m-1}}
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

com $x < ct$.

4.4.2 Difusão fracionária

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (apenas no processo de difusão) tem a seguinte solução:

$$u(x,t) = \left[\frac{\Gamma(1+k)\exp(i\alpha\pi/2)}{\Gamma(1+km)}(\mp c)^\beta(x \pm ct)^{\alpha-\beta}\right]^{\frac{1}{m-1}}. \tag{4.27}$$

A Eq.(4.27) é uma generalização dos resultados dado por V.D. Djordjevic e T.M. Atanackovic (DJORDJEVIC; ATANACKOVIC, 2008). A solução da ordem de número inteiro é recuperada para $\alpha \to 2$ e $\beta \to 1$.

$$u(x,t) = \left[\frac{m-1}{m}(\pm c)(x \pm ct)\right]^{\frac{1}{m-1}}. \tag{4.28}$$

Para o caso particular “ $-c$” na Eq.(4.27):

$$u(x,t) = \left[\frac{\Gamma(1+k)exp(i\alpha\pi/2)}{\Gamma(1+km)}(+c)^\beta(x - ct)^{\alpha-\beta}\right]^{\frac{1}{m-1}}. \tag{4.29}$$

rescrevendo a Eq.(4.29) da seguinte forma:

$$u(x,t) = \left[\frac{\Gamma(1+k)exp(-i\alpha\pi/2)}{\Gamma(1+km)}(-c)^\beta(ct - x)^{\alpha-\beta}\right]^{\frac{1}{m-1}}. \tag{4.30}$$

4.4.3 Difusão fracionária com convecção linear

Para $\lambda_2 = 0$, considerando a difusão e a convecção linear:

$$u(x,t) = \left[\frac{\Gamma(1+k)\exp(i\alpha\pi/2)}{\Gamma(1+km)}\left((\mp c)^{\beta} + \frac{i\lambda_1}{\exp(i\beta\pi/2)}\right)(x \pm ct)^{\alpha-\beta}\right]^{\frac{1}{m-1}}. \tag{4.31}$$

essa é uma generalização do resultado encontrado por F.S. Costa e M.R.A.Pereira (COSTA; PEREIRA 2017). A solução da ordem de número inteiro é recuperada para $\alpha \to 2$ e $\beta \to 1$ em Eq.(4.31).

$$u(x,t) = \left[\frac{m-1}{m}(\pm c - \lambda_1)(x \pm ct)\right]^{\frac{1}{m-1}}. \tag{4.32}$$

Para o caso particular "$-c$" na Eq.(4.31):

$$u(x,t) = \left[\frac{\Gamma(1+k)\exp(i\alpha\pi/2)}{\Gamma(1+km)}\left((+c)^{\beta} + \frac{i\lambda_1}{\exp(i\beta\pi/2)}\right)(x - ct)^{\alpha-\beta}\right]^{\frac{1}{m-1}}. \tag{4.33}$$

pode-se reescrever a Eq.(4.33) da seguinte forma:

$$u(x,t) = \left[\frac{\Gamma(1+k)\exp(i\alpha\pi/2)}{\Gamma(1+km)}\left((-c)^{\beta} + \frac{i\lambda_1}{\exp(i\beta\pi/2)}\right)(ct - x)^{\alpha-\beta}\right]^{\frac{1}{m-1}}. \tag{4.34}$$

4.4.4 Difusão fracionária com reação

Para o caso $\lambda_1 = 0$, obtém-se a solução de difusão fracionária com reação:

$$u(x,t) =$$
$$= \left[\frac{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma(1+k)(\mp c)^{\beta}}{2\Gamma(1+km)}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\lambda_2\Gamma(1+km)\Gamma(1+k-\beta)}{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma^2(1+k)\left(\mp c\right)^{2\beta}}}\right)(x \pm ct)^{\alpha-\beta}\right]^{\frac{1}{m-1}}. \tag{4.35}$$

essa é uma generalização dada por (COSTA et al., 2016). A solução da ordem de número inteiro clássica é recuperada para $\alpha \to 2$ e $\beta \to 1$ na Eq.(4.35)

$$u(x,t) = \left[\frac{m-1}{2m}(\pm c)\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4m\lambda_2}{c^2}}\right)(x \pm ct)\right]^{\frac{1}{m-1}}. \tag{4.36}$$

No caso particular "$-c$" na Eq.(4.35):

$$u(x,t) =$$
$$= \left[\frac{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma(1+k)(+c)^{\beta}}{2\Gamma(1+km)} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\lambda_2\Gamma(1+km)\Gamma(1+k-\beta)}{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma^2(1+k)\,(c)^{2\beta}}} \right) (x-ct)^{\alpha-\beta} \right]^{\frac{1}{m-1}}. \tag{4.37}$$

pode-se reescrever a Eq.(4.37) da seguinte forma:

$$u(x,t) =$$
$$= \left[\frac{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma(1+k)(-c)^{\beta}}{2\Gamma(1+km)} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\lambda_2\Gamma(1+km)\Gamma(1+k-\beta)}{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma^2(1+k)\,(c)^{2\beta}}} \right) (ct-x)^{\alpha-\beta} \right]^{\frac{1}{m-1}}. \tag{4.38}$$

4.5 Solução estacionária da equação de difusão fracionária reação-convecção

Para $m+p=2n$ $m>n$ e $c=0$ na Eq.(4.21):

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(1+km)}{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma(1-\alpha+km)}A^{m} - \frac{i\lambda_1\Gamma(1+kn)}{\exp(i\gamma\pi/2)\Gamma(1-\gamma+kn)}A^{n} + \lambda_2 A^{p} = 0\\
&\frac{\Gamma(1+km)}{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma(1-\alpha+km)}A^{m-n} - \frac{i\lambda_1\Gamma(1+kn)}{\exp(i\gamma\pi/2)\Gamma(1-\gamma+kn)}A^{0} + \lambda_2 A^{p-n} = 0\\
&\frac{\Gamma(1+km)}{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma(1-\alpha+km)}A^{2(m-n)} - \frac{i\lambda_1\Gamma(1+kn)}{\exp(i\gamma\pi/2)\Gamma(1-\gamma+kn)}A^{n-m} + \lambda_2 = 0,
\end{aligned} \tag{4.39}$$

foi utilizado à transformação $\Theta = A^{(m-n)}$, na Eq.(4.39),

$$\frac{\Gamma(1+km)}{\exp(i\alpha\pi/2)\Gamma(1-\alpha+km)}\Theta^{2} - \frac{i\lambda_1\Gamma(1+kn)}{\exp(i\gamma\pi/2)\Gamma(1-\gamma+kn)}\Theta + \lambda_2 = 0. \tag{4.40}$$

Então,

$$\Theta_1 = \frac{i\Gamma(1+kn)\exp(i\alpha\pi/2)}{2\exp(i\gamma\pi/2)\Gamma(1+km)} \left(\lambda_1 \pm \sqrt{\lambda_1^2 - \frac{4\lambda_2\Gamma(1+km)\exp^2(i\gamma\pi/2)\Gamma(1-\gamma+kn)}{\Gamma^2(1+kn)\exp(i\alpha\pi/2)}} \right). \tag{4.41}$$

Portanto $A^{(m-n)} = \Theta_1 \Rightarrow A = \Theta^{\frac{1}{m-n}}$:

$u(x,t) =$

$$= \left\{ \frac{i\Gamma(1+kn)\exp(i\alpha\pi/2)}{2\exp(i\gamma\pi/2)\Gamma(1+km)} \left(\lambda_1 \pm \sqrt{\lambda_1^2 - \frac{4\lambda_2\Gamma(1+km)\exp^2(i\gamma\pi/2)\Gamma(1-\gamma+kn)}{\Gamma^2(1+kn)\exp(i\alpha\pi/2)}} \right) x^{\alpha-\beta} \right\} \tag{4.42}$$

A solução da ordem de número inteiro é recuperada para $\alpha \to 2$ e $\beta \to 1$.

$$u(x,t) = \left[\frac{m-n}{m} \left(\lambda_1 \pm \sqrt{\lambda_1^2 - \frac{4n\lambda_2}{m}} \right) x \right]^{\frac{1}{m-n}}. \tag{4.43}$$

4.6 Gráficos

Foi plotado os gráficos para os casos particulares mostrado na subseção 4.4.1 para as Eq.(4.30), Eq.(4.33) e Eq.(4.37), adotando os valores aos parâmetros: $m = 2$, valor absoluto da amplitude $|A| = 1$ e $\alpha = 2\beta$ o último é devido as relações $m + p = 2$ e Eq.(4.14). Traçando resultados de onda para três fenômenos difusão fracionária, difusão fracionária com convecção e difusão fracionária com reação. Observa-se que a velocidade da propagação cresce atrelada ao aumento de β. As curvas côncavas representam o comportamento anômalo, elas são transformadas em curvas lineares considerando a ordem inteira de β.

Figura 4.1: Perfis de ondas para difusão fracionária com $(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$, $(m,n,p) = (2,1,0)$, $|A| = 1$ $(\beta,\gamma,\alpha) = (0.5, 0.5, 1)$, $(\beta,\gamma,\alpha) = (0.7, 0.7, 1.4)$, $(\beta,\gamma,\alpha) = (1,1,2)$ e quatro instantes de tempo $(t = 0.3,\ t = 0.6,\ t = 1,\ t = 1.3)$ diferentes;

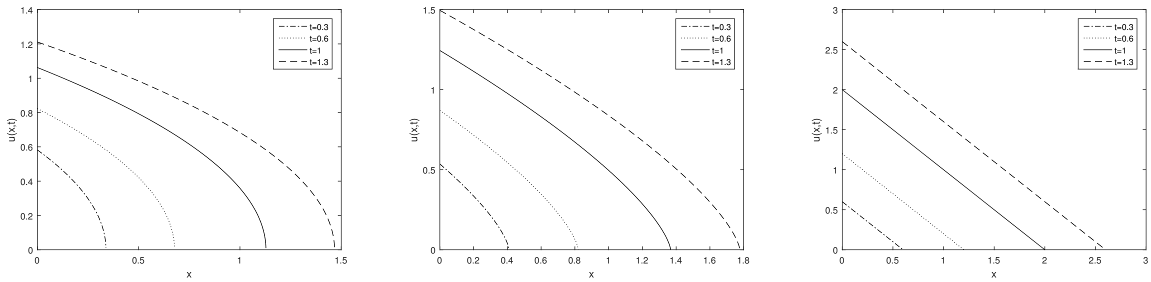


Figura 4.2: Perfis de ondas para difusão fracionária com convecção $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$, $(m, n, p) = (2, 1, 0)$, $|A| = 1$ $(\beta, \gamma, \alpha) = (0.5, 0.5, 1)$, $(\beta, \gamma, \alpha) = (0.7, 0.7, 1.4)$, $(\beta, \gamma, \alpha) = (1, 1, 2)$ e quatro instantes de tempo $(t = 0.3,\ t = 0.6,\ t = 1,\ t = 1.3)$ diferentes;

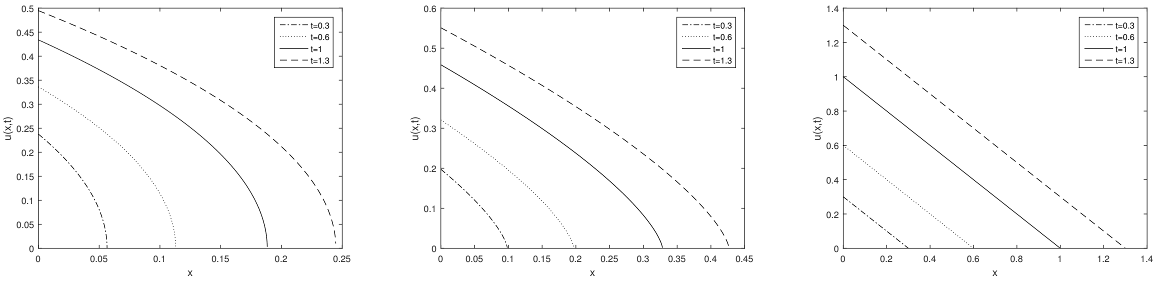
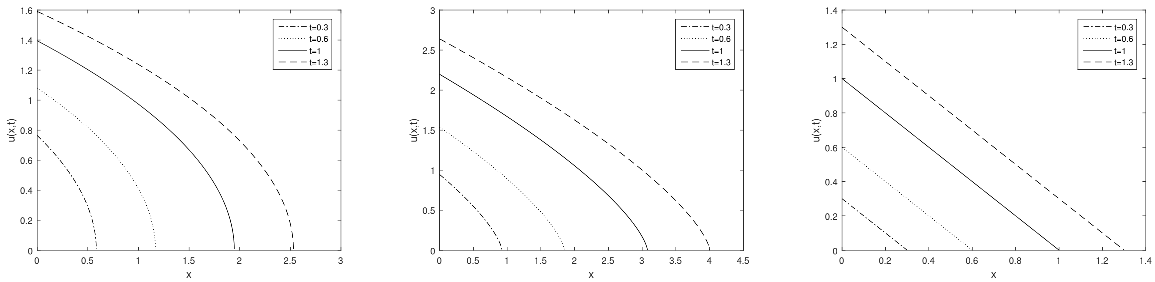


Figura 4.3: Perfis de ondas para difusão fracionária com reação $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$, $(m, n, p) = (2, 1, 0)$, $|A| = 1$ $(\beta, \gamma, \alpha) = (0.5, 0.5, 1)$, $(\beta, \gamma, \alpha) = (0.7, 0.7, 1.4)$, $(\beta, \gamma, \alpha) = (1, 1, 2)$ e quatro instantes de tempo $(t = 0.3,\ t = 0.6,\ t = 1,\ t = 1.3)$ diferentes;



4.7 Resultado e Discussão

Como resultado principal, este trabalho apresentou um método de redução de similaridade para resolver o problema, através de solução explícita de onda viajante, com propagação finita, chamada de frente de onda e solução estacionária. Com base no objetivo proposto foi definido algumas observações:

- Processos de difusão fracionária e difusão fracionária com convecção que a velocidade c aumenta à medida que β aumenta, atingindo seu valor máximo em $\beta \longrightarrow 1$.

- A afirmação pode ser verificada na relação entre amplitude A e velocidade de onda c estabelecida em Eqs.(4.30) e (4.34). Para a difusão fracionária com reação, a velocidade de onda c não é monotônica para $0 < \beta \leq 1$, como pode-se observar nas figuras.

- Portanto, concluí-se que a equação Eq.(4.2) pode ser interpretado como um modelo com atraso para difusão fracionária e difusão fracionária linear com convecção, o que não é mais verdadeiro para a difusão fracionária com reação, como é visto pela velocidade da onda c.

5

Considerações Finais

Neste trabalho foi definido as derivadas fracionárias e suas propriedades. Dessa forma, mostrou-se os processos de difusão fracionária não-linear, temporal e espacial. Para tal, apresentou-se o modelo fracionário usado para descrever a equação de difusão, com reação e convecção e explicou-se sobre o uso das derivadas fracionárias, utilizando soluções do tipo ondas viajantes. Sendo assim, encontrou-se casos particulares que ocorrem na solução geral e por fim, apresentou-se alguns gráficos com o intuito de analisar o comportamento anômalo associado à memória e distância.

5.1 Contribuições Acadêmicas

A equação de difusão fracionária não linear, abrange muitas aplicações,como a infiltração de água no solo, desenvolvida pela equação de Boussinesq, em que $m = 2$ podendo ser observado o comportamento dos fenômenos de reação e convecção.

5.2 Trabalhos Futuros

Objetiva-se futuramente investigar: Soluções numéricas para soluções da equação de difusão fracionária espacial e soluções numéricas e computacionais para a difusão fracionária não linear com convecção e reação;

5.3 Publicações

5.3.1 Periódicos

- **Travelling Waves in Space-Fractional Nonlinear Diffusion with Linear Convection**, Journal of Applied Mathematics and Physics, ISSN online: 2327-4379 (Publicado).

- **Fractional space–time nonlinear reaction–convection–diffusion**, Computational and Applied Mathematics, ISSN online: 1807-0302 (Publicado).

REFERÊNCIAS

ATANACKOVIC, T. M. et al. *Fractional calculus with applications in mechanics: wave propagation, impact and variational principles*, John Wiley & Sons, 2014.

BILER, P.; IMBERT, C.; KARCH, G. The nonlocal porous medium equation: Barenblatt profiles and other weak solutions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 215, n. 2, p. 497-529, 2015.

CAMARGO, R. F.; DE OLIVEIRA, E. C. *Cálculo fracionário.* 1ª Edição, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

CAMARGO, R. F. *Cálculo fracionário e aplicações.* 2009. Tese de Doutorado (Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

CAMARGO, F. R.; CHIACCHIO, A. O.; DE OLIVEIRA, E. C. Differentiation to fractional orders and the fractional telegraph equation, *Journal of Mathematical Physics*, v.49, n.3, p. 033505, 2008.

COSTA, F. S. *Cálculo Fracionário e a Função de Fox.* 2011. Tese de Doutorado (Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

COSTA, F. S. et al. Similarity solution to fractional nonlinear space-time diffusion-wave equation, *Journal of Mathematical Physics*, v. 56, n. 3, p. 033507, 2015.

COSTA, F. S.; PEREIRA, M. R. A. Travelling Waves in Space-Fractional Nonlinear Diffusion with Linear Convection. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, v. 5, p. 462-468, 2017.

COSTA, F. S. et.al On the fractional Harry Dym equation. *Computational and Applied Mathematics*, p. 1-15, 2017. COSTA, F. S.; MARÃO, J. A. P. F; LIMA, W. J. V. Problema Não Linear de Difusão Fracionária com Absorção, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics* 5:010205.

DIETHELM, K. *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type.* New York: Springer, 2010.

DJORDJEVIC, V. D.; ATANACKOVIC T. M. Similarity solutions to nonlinear heat conduction and Burgers/Korteweg–deVries fractional equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 222, n. 2, p. 701–714, 2008.

FOURIER, J. B. J. The analytical theory of heat. *Dover Books on Physics Series*, Dover Publications, 2003.

GILDING, B. H.; KERSNER, R. *Travelling waves in nonlinear diffusion-convection-*

reaction, v.60, Birkhäuser, 2012.

GONZÁLEZ, R. S. *Difusao anômala: Transição entre os regimes localizado e estendido na caminhada do turista unidimensional.* 2006. Tese de Doutorado - Universidade de São Paulo, São Paulo.

GRIGOLETTO, E. C. et al. Aplicações do Teorema Fundamental do Calculo Fracionário em Equações Diferenciais Fracionárias. *Anais do I CMAC Sudeste*, p. 59-64, 2013.

GRIGOLETTO, E. C.; DE OLIVEIRA, E. C. Fractional versions of the fundamental theorem of calculus, *Applied Mathematics*, v. 4, n. 07, p.23, 2013.

HILFLER, R. *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.

HUANG, Y. Explicit Barenblatt profiles for fractional porous medium equations. *Bulletin of the London Mathematical Society*, v. 46, n. 4, p. 857-869, 2014.

KILBAS A. A.; SRIVASTAVA, H. M. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Mathematics Studies.* v.204, Edited by Jan Van Mill, Elsevier, Amsterdam, 2006.

LUKE, Y. L. Mathematical functions and their approximations. *Physica D: Nonlinear Phenomena.* Academic Press, 2014.

MACHADO, J. T.; KIRYAKOVA, V.; MAINARDI, F. *Recent history of fractional calculus."Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* v. 16, n. 3, p. 1140-1153, 2011.

MAINARDI, F.; PAGNINI, G.; SAXENA, R. K. Fox H function in fractional diffusion, *J.Comput. Appl. Math.* v.178, p.321-331, 2005.

MAINARDI, F.; MURA, A.; PAGNINI, G. The M-Wright function in time-fractional diffusion process: tutorial survey, *International Journal of Differential Equations.* v.2010, ID 104505, 2010.

MAINARDI, F.; LUCHKO, Y.; PAGNINI, G. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation. *arXiv preprint cond-mat/0702419*, v. 4, p. 153–192, 2007.

MAINARDI, F. *The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation.* Appl. Math. Lett, v.9, p.23-28, 1996.

MAINARDI, F. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation. *Waves and Stability in Continuous Media, World Scientific, Singapore*, v. 1994, p. 246-251, 1994.

MATHAI, A. M.; SAXENA, R. K. Saxena.; HAUBOLDH. J. *The H- function, theory and applications.* Springer, New York, 2009.

NARASIMHAN, T. N. Fourier's Heat Equation: History, Influence, and Connections. *Reviews of Geophysics*, v. 37, n. 1, p. 151-172, 1999.

OLIVEIRA, H. S. *Cálculo de ordem arbitrária.* 2010. Tese de Doutorado (Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

ORSINGHER, E.; BEGHIN, L. Time-fractional telegraph equations and telegraph processes with Brownian time. *Probability Theory and Related Fields*, v. 128, n. 1, p. 141-160, 2004.

ORSINGHER, E.; ZHAO, X. The space-fractional telegraph equation and the related fractional telegraph process, *Chinese Annals of Mathematics*, v.24, 45-56, 2003.

ORTIGUEIRA, M. D. *Fractional calculus for scientists and engineers.* Springer Science & Business Media, 201.

PEDRON, I. T. *Estudos em difusão anômala.* 2015. Tese de Doutorado - Universidade Estadual de Maringá, Maringá. PŁOCINICZAK, L.; OKRASIŃSKA, H. Approximate self-similar solutions to a nonlinear diffusion equation with time-fractional derivative. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 261, p. 85-91, 2013.

PŁOCINICZAK, L. Approximation of the Erdelyi-Kober Operator with Application to the Time-Fractional Porous Medium Equation. *Journal on Applied Mathematics*, v. 74, n. 4, p. 1219-1237, 2014.

PŁOCINICZAK, L. Analytical studies of a time-fractional porous medium equation. Derivation, approximation and applications. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 24, n. 1-3, p. 169-183, 2015.

PŁOCINICZAK, L; SOBIEZEK, S. Numerical schemes for integro-differential equations with Erdérlyi-Kober fractional operator. *Numerical Algorithms*, v. 76, n. 1, p. 125-150, 2017.

PŁOCINICZAK, L; OKRASIŃSKA, H. Approximate self-similar solutions to a nonlinear diffusion equation with time-fractional derivative. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 261, p. 85-91, 2013.

PRABHAKAR, T. R. A singular integral equation with generalized Mittag-Leffler function in the kernel. *The Yokohama mathematical journal*, v.19, n. 1, p. 7-15, 1971.

PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations.* v.198, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, (1993).

PRUDNIKOV, A. P.; BRYCHKOV, Y. A.; MARICHEV, O. I. Integrals and series, *American Journal of Physics*, (1998).

RIESZ, M. *Collected Papers*, ed. L. Gårding and L. Hörmander, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, (1988).

SAMKO, S. G.; KILBAS, A. A.; MARICHEV, O. I. Fractional Intehgrals and Derivates: Theory and Applications. *Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon*, v. 1993, p. 44, 1993.

SOARES, J. C. A. Soares *Cálculo Fracionário e as Equações de Evolução.* 2016. Tese de Doutorado (Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

TATEISHI, A. A. *Desenvolvimento do Conceito de Difusao: De Fourier ao Modelo de Pente.* 2010. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá.

VÁZQUEZ, J. L. *The porous medium equation: mathematical theory.* Oxford

University Press, 2007.

VÁZQUEZ, J. L. Barenblatt solutions and asymptotic behaviour for a nonlinear fractional heat equation of porous medium type. *Journal Europ. Math. Society*, 2013.

VIEIRA, D. S. *Equação de Difusão e o Cálculo Fracionário.* 2010. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá.

VULPIANI, A. Lewis Fry Richardson: scientist, visionary and pacifist. *Lettera Matematica*, v. 2, n. 3, p. 121-128, 2014.

ZHANG, H.; LIU, F. The fundamental solutions of the space, space-time Riesz fractional partial differential equations with periodic conditions. *Numerical Mathematics - English Series.* v. 16, n. 2, p. 181, 2007.