

Letícia de Fátima Corrêa Costa

**Uma Nova Meta-heurística Adaptativa  
Baseada em Vetor de Avaliações  
para Otimização de Portfólios de  
Investimentos**

Brasil

2019

Letícia de Fátima Corrêa Costa

**Uma Nova Meta-heurística Adaptativa  
Baseada em Vetor de Avaliações  
para Otimização de Portfólios de Investimentos**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia da Computação e Sistemas na modalidade Mestrado Profissional da Universidade Estadual do Maranhão, como parte das exigências para obtenção do título de Mestra em Engenharia da Computação e Sistemas.

Universidade Estadual do Maranhão - UEMA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - CCET

Engenharia da Computação e Sistemas - Mestrado Profissional

Orientador: Prof. Dr. Omar Andes Carmona Cortes

Brasil

2019

Costa, Letícia de Fátima Corrêa.

Uma nova meta-heurística adaptativa baseada em vetor de avaliações para otimização de portfólios de investimentos / Letícia de Fátima Corrêa Costa. – São Luís, 2019.

106 f

Dissertação (Mestrado) – Curso de Engenharia de Computação e Sistemas, Universidade Estadual do Maranhão, 2019.

Orientador: Prof. Dr. Omar Andes Carmona Cortes.

1.Exame inteligente. 2.Otimização por partículas de enxame. 3.Evolução diferencial. 4.Colônia artificial de abelhas. 5.Meta-heurística. 6.Seleção de portfólios. I.Título

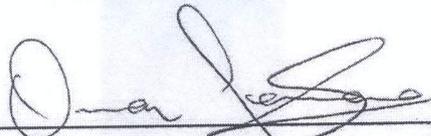
CDU: 004.023

Letícia de Fátima Corrêa Costa

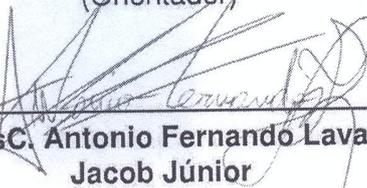
**Uma Nova Meta-heurística Adaptativa  
Baseada em Vetor de Avaliações  
para Otimização de Portfólios de Investimentos**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia da Computação e Sistemas na modalidade Mestrado Profissional da Universidade Estadual do Maranhão, como parte das exigências para obtenção do título de Mestra em Engenharia da Computação e Sistemas.

Trabalho Aprovado. Brasil, 20 setembro de 2019.



**Prof. Dr. Omar Andes Carmona Cortes**  
Instituto Federal de Educação, Ciência e  
Tecnologia do Maranhão (IFMA)  
(Orientador)



**Prof. MSc. Antonio Fernando Lavareda  
Jacob Júnior**  
Universidade Estadual do Maranhão  
(UEMA)



**Prof. Dr. Bruno Feres de Souza**  
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)



**Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra**  
Instituto Federal de Educação, Ciência e  
Tecnologia do Maranhão (IFMA)

Brasil  
2019

*Dedico este trabalho aos meus filhos Lucas e Pedro, por me darem a força e a coragem para alçar este vôo...*

# Agradecimentos

Agradeço imensamente à Deus.

Agradeço ao meu orientador o Professor Dr. Omar Andes Carmona Cortês pelo seu compromisso e empenho para que este trabalho se tornasse realidade. Pelos ensinamentos na área da computação inteligente através de aulas ministradas em Redes Neurais, Sistemas Fuzzy, Inteligência de Enxames e pesquisas em algoritmos evolucionários e pelas orientações recebidas durante o desenvolvimento desta pesquisa.

Agradeço especialmente aos meus pais Leconde e Marise pelos cuidados com minha educação. Agradeço ao meu esposo Daniel Costa, aos meus filhos, Lucas David e Pedro Henrique, pelo suporte e pela paciência às horas que dediquei a este estudo. Ao meu sogro, Delmir David, e a minha sogra, Vilma, e aos demais familiares de meu esposo, por nossa amizade. E aos meus queridos familiares em São Bento, minha terra natal.

Agradeço aos colegas do Curso pelas horas de discussão que me fizeram repensar pontos sobre meu trabalho e melhorá-los. E em especial aos amigos João Pedro, Raimundo Oswaldo e a Beatriz Nery por participarem mais efetivamente no decorrer do desenvolvimento e/ou escrita desta pesquisa.

Agradeço a todos os professores da Universidade Estadual do Maranhão pelos ensinamentos e apoio que recebi ao longo deste curso. E em especial aos professores MSc. Josenildo Silva, Dr. Karla Fook e Dr. João Carlos do Instituto Federal do Maranhão pelos incentivos que sempre me fizeram progredir.

Agradeço à todos os colegas e amigos do Curso, que direta ou indiretamente contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

*“A persistência é o menor caminho para a vitória. (Charles Chaplin)”*

# Resumo

Este trabalho apresenta uma meta-heurística baseada em vetores de avaliação nomeada AVEMH, para solucionar problemas multiobjetivos. Esta meta-heurística consiste em evoluir duas populações de forma independente e trocar informações entre elas de forma que a primeira população evolua de acordo com o melhor indivíduo da segunda população e vice-versa. A escolha dos algoritmos a serem executados em cada geração é realizada de forma estocástica entre três algoritmos evolucionários existentes na literatura: PSO, DE e ABC. Os resultados desta meta-heurística são comparados usando funções de benchmarks, bem como aplicado ao problema do mundo real conhecidos por Seleção de Portfólios. Para avaliar a qualidade dos resultados obtidos utiliza-se uma métrica bem conhecida na análise de algoritmos evolucionários multiobjetivos denominada hiper volume. Foram aplicados testes de variância (ANOVA) e testes de Tukey para demonstrar que a nova meta-heurística pode encontrar melhores hiper volumes tanto nas funções de benchmarks Zdt quanto na otimização de portfólios de investimentos.

**Palavras-chaves:** Enxame Inteligente. Otimização por Partículas de Enxames. Evolução Diferencial. Colonia Artificial de Abelhas. Meta-heurística. Seleção de Portfólios.

# Abstract

This paper presents a metaheuristic based on evaluation vectors named AVEMH to solve multiobjective problems. This meta-heuristic consists of evolving two populations independently and exchanging information between them so that the first population evolves according to the best individual in the second population and vice versa. The choice of algorithms to be executed in each generation is stochastic between three evolutionary algorithms in the literature: PSO, DE and ABC. The results of this meta-heuristic are compared using benchmark functions as well as applied to the real world problem known as Portfolio Selection. To evaluate the quality of the results obtained, we use its well-known metric in the analysis of evolutionary multiobjective algorithms called hyper volume. Tests have shown that the new metaheuristic can find the best hyper volumes in both the benchmark ZDT functions and the optimization of investment portfolios. Analysis of variance (ANOVA) and Tukey tests were applied to demonstrate that the new meta-heuristic can find better hyper volumes in both Zdt benchmark functions and investment portfolio optimization.

**Key-words:** Intelligent Swarm. Swarm Particle Optimization. Differential Evolution. Artificial Bee Colony. Meta-heuristics. Selection of Portfolios.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Mapeamento entre espaço de estados e espaço de objetivos . . . . .	30
Figura 2 – Fronteira Real das Funções de <i>Benchmark</i> ZDT's . . . . .	34
Figura 3 – Fronteira real das funções de <i>benchmark</i> para a Seleção de Portfólios. . . . .	35
Figura 4 – Ilustração do Hipervolume . . . . .	38
Figura 5 – Posição dos algoritmos evolucionários como métodos de busca . . . . .	40
Figura 6 – Fronteira Eficiente de Markowitz . . . . .	52
Figura 7 – Fluxograma AVEMH . . . . .	54
Figura 8 – Ilustração das roletas do AVEMH . . . . .	56
Figura 9 – Análise gráfica sobre o melhor indivíduo da Pop1 para a Pop2 e vice-versa . . . . .	59
Figura 10 – Ilustração da troca do melhor indivíduo. . . . .	60
Figura 11 – População gerada pelos melhores indivíduos vindo de Pop1 e Pop2. . . . .	61
Figura 12 – Comparativo da fronteira real das funções de <i>benchmark</i> com as fronteiras encontradas pelo AVEMH para as Zdt's. . . . .	64
Figura 13 – Comparativo do AVEMH em relação às heurísticas estáticas na resolução do problema Zdt1. . . . .	67
Figura 14 – Comparativo do AVEMH em relação às heurísticas estáticas na resolução do problema Zdt2. . . . .	68
Figura 15 – Comparativo do AVEMH em relação às heurísticas estáticas na resolução do problema Zdt3. . . . .	68
Figura 16 – Comparativo do AVEMH em relação às heurísticas estáticas na resolução do problema Zdt4. . . . .	69
Figura 17 – Comparativo do AVEMH em relação às heurísticas estáticas na resolução do problema Zdt6. . . . .	69
Figura 18 – Comparativo da fronteira real das funções de <i>benchmark</i> com as fronteiras encontradas pelo AVEMH para a Seleção de Portfólios. . . . .	71
Figura 19 – Comparativo do AVEMH em relação às heurísticas estáticas na resolução dos problemas da Seleção de Portfólios - Conjunto Hong Kong Hang Seng. . . . .	75
Figura 20 – Comparativo do AVEMH em relação às heurísticas estáticas na resolução dos problemas da Seleção de Portfólios - Conjunto German Dax 100. . . . .	75
Figura 21 – Comparativo do AVEMH em relação às heurísticas estáticas na resolução dos problemas da Seleção de Portfólios - Conjunto British FTSE 100. . . . .	76

Figura 22 – Comparativo do AVEMH em relação às heurísticas estáticas na resolução dos problemas da Seleção de Portfólios - Conjunto US S&P 100. . . . .	76
Figura 23 – Comparativo do AVEMH em relação às heurísticas estáticas na resolução dos problemas da Seleção de Portfólios - Conjunto Japanese Nikkei. . . . .	77
Figura 24 – Publicações: journal Iberamia . . . . .	98

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Trabalhos que se propuseram à resolução do PSP . . . . .	21
Tabela 2 – Trabalhos Correlatos: Pontos em Comum e Diferenças . . . . .	25
Tabela 3 – Funções ZDT . . . . .	32
Tabela 4 – Hipervolumes ótimos para $\mu = 100$ . . . . .	33
Tabela 5 – Cronologia de Propostas para MOEAs. . . . .	43
Tabela 6 – Natureza dos Parâmetros utilizados na Pesquisa . . . . .	62
Tabela 7 – Parâmetros Utilizados . . . . .	63
Tabela 8 – Resultados Calculados pelo AVEMH para as Zdt's . . . . .	65
Tabela 9 – Quantidades de soluções não dominadas atingidas pelo AVEMH para as Zdt's. . . . .	65
Tabela 10 – Comparativos dos melhores resultados atingidos pelo AVEMH em relação aos melhores resultados atingidos com VEPSO, VEABC e VEDE, para as funções de testes Zdt's. . . . .	65
Tabela 11 – Teste ANOVA comparando o AVEMH com as demais meta-heurísticas nas funções ZDT . . . . .	66
Tabela 12 – Teste de Tukey comparando o AVEMH com as demais meta-heurísticas nas funções ZDTs . . . . .	67
Tabela 13 – Medidas calculadas pelo AVEMH para o problemas de Seleção de Portfólios. . . . .	70
Tabela 14 – Comparativo dos melhores resultados atingidos pelo AVEMH em relação aos resultados atingidos com VEPSO, VEABC e VEDE, para o problema de Seleção de Portfólio. . . . .	70
Tabela 15 – Teste ANOVA comparando o AVEMH com as demais meta-heurísticas	72
Tabela 16 – Teste de Tukey comparando o AVEMH com as demais meta-heurísticas nos portfólios HST e DAX . . . . .	72
Tabela 17 – Média do tempo de execução em minutos para a Seleção de Portfólios - 2000 gerações . . . . .	73
Tabela 18 – Carteiras eficientes para o 'Hong Kong Hang Seng' calculados pelo AVEMH . . . . .	73

# Lista de abreviaturas e siglas

ABC	Artificial Bee Colony
AG	Genetic Algorithm
AVEMH	Heurística Multiobjetivo Vetorial Adaptativa
CAEP	Cultural Algorithm with Evolutionary Programming
DAX	Conjunto de dados 'German Dax 100'
DE	Differential Evolution
DE/Best/1	Estratégia da DE em que o indivíduo $\alpha$ é substituído pelo melhor indivíduo da população.
DE/Rand/Bin	Estratégia da DE em que os indivíduos $\alpha, \beta, \gamma$ são escolhidos aleatoriamente.
EA	Evolutionary Algorithm
EP	Evolutionary Programming
ES	Evolutionary Strategy
FTSE	Conjunto de dados 'British FTSE 100'
GA	Algoritmo Genético
GOA	Grasshopper Optimization Algorithm
HSI	Conjunto de dados 'HongKong Hang Seng'
ISPEA	Immunity SPEA
Micro-GA	Multi-Objective Micro-Genetic Algorithm
Micro-GA 2	Multi-Objective Micro Genetic Algorithm 2
MOEA	Algoritmo Evolucionário Multiobjetivo
MOEA/D	Multiobjective Evolutionary Algorithm based on Decomposition
MOGA	Multi-Objective Genetic Algorithm
MOGOA	Multi-objective grasshopper optimization algorithm

MONGA I	Multiobjective Messes Genetic Algorithm I
MONGA II	Multiobjective Messes Genetic Algorithm II
MOP	Problema Multiobjetivo
MOPSO	Multi-Objective Particle Swarm Optimization
MOSHO	Multi-objective Spotted Hyena Optimizer
M-PAES	A Memetic Pareto-Archived Evolutionary Strategy
MPGA	Multi-Population Genetic Algorithm
Nikkei 225	Conjunto de dados 'Japanese Nikkei'
NPGA	II Niche Pareto Genetic Algorithm II
NPGA	Niche Pareto Genetic Algorithm
NSGA	Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm
NSGAI	Elitist Non-dominated Sorting GA
PAES	Pareto-Archived Evolutionary Strategy
ParEGO	Pareto Efficient Global Optimization
PESA I	Pareto Enveloped-Base Selection Algorithm I
PESA II	Pareto Enveloped-Base Selection Algorithm II
Pop1	Subpopulação de indivíduos do AVEMH que trabalha com a função que mede o risco do portfólio
Pop2	Subpopulação de indivíduos do AVEMH que trabalha com a função que mede o retorno do portfólio
PopFinal	População resultante da união das primeiras e segundas subpopulações do AVEMH
PPES	Predator-Prey Evolution Strategy
PSO	Particle Swarm Optimization
PSP	Problema de Seleção de Portfólios
REMOEA	Rudolph's Elitist Multi-Objective Evolutionary Algorithm
S&P 100	Conjunto de dados 'US S&P 100'

SHO	Spotted Hyena Optimizer
SPEA	Strenght Pareto Evolutionary Algorithm
SPEA2	Strenght Pareto Evolutionary Algorithm 2
TDGA	Thermodynamical Genetic Algorithm
VE	Vector Evaluated
VEABC	Vector Evaluated Artificial Bee Colony
VEDE	Vector Evaluated Differential Evolution
VEGA	Vector Evaluated Genetic Algorithm
VEPBIL	Vector Evaluated Population Based Incremental Learning
VEPSO	Vector Evaluated Particle Swarm Optimization
WBGA	Weigth Based Genetic Algorithm
ZDT	Funções de minimização criadas por Zitzler Deb e Thiele

# Lista de símbolos

$f_1; f_2$	Função a serem otimizadas
$L_{inf}; L_{sup}$	Limites máximo e mínimo respeitados em cada dimensão do problema
$x^k \succcurlyeq x^m$	A solução $x^k$ domina a solução $x^m$
$w; c_1; c_2$	Constante de inercia e aceleração do PSO
$r_1; r_2$	Números aleatórios gerados no PSO
$v_1; v_2$	Velocidades das partículas no PSO
$gBest$	Melhor indivíduo do PSO
$pBest$	Melhor indivíduo encontrado na população
$\phi$	Número aleatório entre $[1, -1]$ utilizado no ABC
$\varphi$	Número aleatório entre $[0, C]$ , onde $C$ é uma constante não negativa utilizado no ABC
$fit$	Valor da função de avaliação
$F$	Fator de Mutação na DE
$CR$	Taxa de crossover na DE
$\alpha; \beta; \gamma$	Três indivíduos escolhidos aleatoriamente na DE
$v$	Vetor de diferenças na DE
$\mu$	Quantidade de indivíduos de uma população
$h_v$	Hipervolume
$\mathcal{Q}$	Conjunto de soluções de Ótimos Pareto
$\sigma_{ij}$	Variância de determinado ativo $i$ em relação ao ativo $j$
$\sigma^2$	Desvio padrão do portfólio
$r_p$	Média do retorno do portfólio
$w_i$	Percentual para investir em cada ativo $i$
$e$	Número de genes que serão atualizados no problema da Seleção de Portfólios

# Lista de Algoritmos

1	Particle Swarm Otimization. Fonte (KENNEDY; EBERHART, 1995) . . .	45
2	Artificial Bee Colony. Fonte (KARABOGA; BASTURK, 2007) . . . . .	47
3	Evolução Diferencial. Fonte (STORN; PRICE, 1995) . . . . .	49

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
1.1	Estado da Arte	21
1.2	Trabalhos Correlatos	22
1.3	Justificativa	26
1.4	Objetivos	27
1.4.1	Objetivo Geral	27
1.4.2	Objetivos Específicos	27
1.5	Organização da Dissertação	27
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	<b>29</b>
2.1	Problemas Multiobjetivos	29
2.1.1	Dominância de Pareto	30
2.1.2	Otimidade de Pareto	31
2.1.3	Métodos de Resolução para Problemas Multiobjetivos	31
2.1.4	Funções de <i>Benchmark</i>	32
2.1.4.1	Problemas Zdt's	32
2.1.4.2	Problemas de Seleção de Portfólios	35
2.1.5	Métricas para Problemas Multiobjetivos	37
2.1.5.1	Métricas de Convergência	37
2.1.5.2	Métricas de Diversidade	37
2.2	Meta-Heurística	38
2.2.1	Algoritmos Evolucionários	39
2.2.2	Algoritmos Evolucionários Multiobjetivos	41
2.2.2.1	Otimização por Enxame de Partícula	45
2.2.2.2	Colônia Artificial de Abelhas	46
2.2.2.3	Evolução Diferencial	49
2.3	O Problema de Seleção de Portfólios	51
2.3.1	Análise de Risco X Retorno	53
<b>3</b>	<b>META-HEURÍSTICA ADAPTATIVA BASEADA EM VETOR DE AVALIAÇÕES</b>	<b>54</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS OBTIDOS</b>	<b>62</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>78</b>
5.1	Conclusões	78
5.2	Contribuições	80

<b>5.3</b>	<b>Limitações e Trabalhos Futuros</b> . . . . .	<b>81</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>83</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>92</b>
	<b>APÊNDICE A – APRESENTAÇÃO DE PARTE DOS CÓDIGOS DE- SENVOLVIDOS DO AVEMH</b> . . . . .	<b>93</b>
<b>A.1</b>	<b>A Escolha das Heurísticas</b> . . . . .	<b>93</b>
<b>A.2</b>	<b>Execução da Heurística Escolhida - Subpopulação1</b> . . . . .	<b>94</b>
<b>A.3</b>	<b>Avaliação de Aceitação do Melhor Indivíduo Candidato</b> . . . . .	<b>95</b>
<b>A.4</b>	<b>Avaliação da população pelo Melhor Indivíduo</b> . . . . .	<b>96</b>
	<b>ANEXOS</b>	<b>97</b>
	<b>ANEXO A – PUBLICAÇÕES 2019</b> . . . . .	<b>98</b>
	<b>ANEXO B – COMPOSIÇÃO DO ÍNDICE ‘HONG KONG HANG SENG’</b> . . . . .	<b>99</b>
	<b>ANEXO C – COMPOSIÇÃO DO ÍNDICE ‘GERMAN DAX’</b> . . . . .	<b>100</b>
	<b>ANEXO D – COMPOSIÇÃO DO ÍNDICE ‘BRITISH FTSE’</b> . . . . .	<b>101</b>
	<b>ANEXO E – COMPOSIÇÃO DO ÍNDICE ‘US S&amp;P 100’</b> . . . . .	<b>102</b>
	<b>ANEXO F – COMPOSIÇÃO DO ÍNDICE ‘NIKKEI 225’</b> . . . . .	<b>104</b>

# 1 Introdução

As pesquisas envolvendo a otimização de problemas do mundo real normalmente envolvem múltiplos objetivos. Quando um problema de otimização envolve mais que um objetivo conflitante, a tarefa de encontrar soluções ótimas é conhecido como problema de otimização multiobjetivo (*MOP's, do inglês Multi-Objective Problems*). Uma das formas de resolver esse tipo de problema é através da utilização de algoritmos evolucionários multiobjetivos (*MOEA's, do inglês Multi-Objective Evolutionary Algorithms*), os quais podem ou não ser baseados na otimalidade de Pareto.

De acordo com [Deb \(2001\)](#) a primeira aparição de um MOEA ocorreu em 1985 ([SCHAFFER, 1985](#)), quando David Shaffer propôs o *Vector Evaluated Genetic Algorithm* (VEGA). O principal problema do VEGA é que ele tendia a perder rapidamente a diversidade, pois populações independentes trabalham em diferentes funções. Dessa forma, não havia uma boa distribuição das soluções sobre a curva de Pareto. [Fonseca e Fleming \(1993\)](#) propuseram um algoritmo multiobjetivo chamado *Multi-Objective Genetic Algorithm* (MOGA), que foi o primeiro a considerar a dominância entre as soluções. Desde então, diversos algoritmos, tais como NSGA-II ([DEB et al., 2000](#)), SPEA2 ([ZITZLER; THIELE, 2001](#)), VEPSO ([PARSOPOULOS; VRAHATIS, 2002](#)), VEDE ([PARSOPOULOS et al., 2004](#)), VEABC ([OMKAR et al., 2011](#)), VEPBIL ([CORTES; RAU-CHAPLIN, 2015](#)), dentre outros, têm sido propostos, com particular interesse nos algoritmos baseados em avaliação vetorial como o VEPSO, VEABC e VEDE.

Os MOEA's estabelecem um importante campo de pesquisa e aplicações em vários domínios. Dentre algumas questões que atualmente estão sendo exploradas pode-se citar a aplicação em problemas com três ou mais funções objetivo, a resolução de MOP's custosos de forma que a resolução desses problemas seja computacionalmente aceita e o desenvolvimento de modelos híbridos que utilizam os algoritmos evolucionários (*EA, do inglês, Evolutionary Algorithm*) com outras técnicas da computa-

ção inteligente. Este trabalho em particular investiga a resolução de MOP's custosos através da resolução do problema da Seleção de Portfólios (PSP).

Tomando o VEPSO como exemplo, ele tem sido amplamente utilizado em vários tipos de problemas de otimização principalmente por ser de fácil implementação. Sendo uma heurística multiobjetivo baseada no VEGA, a principal ideia por trás deste algoritmo é conseguir evoluir dois enxames independentes a partir de informações que são trocadas entre eles, ou seja, assumindo-se dois enxames independentes  $S1$  e  $S2$  para resolverem a otimização de duas funções multiobjetivo, ditas,  $f1$  e  $f2$ . Então, o enxame  $S1$  atualiza sua posição e velocidade baseando-se na melhor partícula de  $S2$  e vice-versa (CORTES; RAU-CHAPLIN; PRADO, 2014).

Esse interesse nos algoritmos VE se dá pelas seguintes razões: primeiramente, os algoritmos VE são adequados para problemas cuja quantidade de objetivos é par, sendo que muitos problemas do mundo real são baseados em dois objetivos; segundo, são fáceis de implementar se comparados a algoritmos multiobjetivos tradicionais, pois cada função é tratada de forma simples por cada subpopulação.

Neste contexto este trabalho propõe uma meta-heurística adaptativa baseada em avaliação vetorial para solucionar problemas multiobjetivos. O termo adaptativo se refere à capacidade de um algoritmo de se “auto adaptar” ao problema que está sendo investigado. Isto pode ser caracterizado como a robustez da meta-heurística. De forma mais geral espera-se que ela consiga encontrar boas soluções em uma diversidade de problemas. O novo algoritmo é testado em funções de *benchmarks* multiobjetivo e em uma aplicação do mundo real conhecida como Seleção de Portfólios, cujo objetivo é encontrar o melhor custo benefício entre as métricas risco e retorno de modo a minimizar o risco e maximizar o retorno.

Pontualmente, as principais contribuições deste trabalho são: (1) a investigação da interação entre as heurísticas que consistem o estado da arte para heurísticas baseadas em métodos vetoriais. (2) o desenvolvimento e implementação de um modelo auto adaptativo utilizando as três meta-heurísticas, ditas: VEPSO, VEDE e o VEABC.

(3) e a resolução do problema do mundo real, conhecido por Seleção de Portfólio, a partir do modelo desenvolvido.

## 1.1 Estado da Arte

O estado da arte na resolução de problemas multi-objetivos do mundo real está na investigação de problemas custosos de resolver. Já o estado da arte para algoritmos multiobjetivos baseados em avaliação vetorial têm-se as heurísticas exploradas neste trabalho e para trabalhos que possuem foco na resolução de problemas do mundo real através da utilização de métodos baseados na avaliação vetorial, tem-se esta própria pesquisa. Para tanto este trabalho baseia-se em heurísticas de análise vetorial disponíveis na literatura.

Os trabalhos com MOEA's voltados para a resolução deste problema em específico são apresentados na tabela 1.

Tabela 1 – Trabalhos que se propuseram à resolução do PSP

Referência do Trabalho	Método de Resolução
Esta Pesquisa (2019)	Separação de Objetivos
<a href="#">Yevseyeva et al. (2014)</a>	Modelo Probabilístico
<a href="#">Chen Yangbin Lin (2017)</a>	Baseado na Busca Local
<a href="#">Qu et al. (2017)</a>	Priorização de Objetivos

Fonte: Dados gerados neste trabalho

Atualmente a aplicabilidade dos MOEA's envolve diversas áreas para a resolução de problemas do mundo real, tais como auxílio na construção de projetos de arquitetura ([MARTINO, 2015](#)), na resolução do problema conhecido por "Predição de Estruturas de Proteínas"([GABRIEL; MELO; DELBEM, 2012](#)), na resolução do problema conhecido por "Despacho Econômico/Ambiental"([QU et al., 2018](#)), na resolução de problemas de engenharia ([DHIMAN; KUMAR, 2018](#)), ([MANHEIM; DETWILER, 2019](#)), na resolução de problemas de roteamento de fluxos em redes de computadores ([FERNANDES, 2019](#)), na programação de ferrovias ([NITISIRI; GEN; OHWADA, 2019](#)) etc.

A próxima subseção apresenta individualmente os pontos explorados em cada trabalho correlato e as características que foram absorvidas para o desenvolvimento deste.

## 1.2 Trabalhos Correlatos

As ideias básicas implementadas nesta dissertação são dos trabalhos ([PARSOPOULOS; VRAHATIS, 2002](#)), ([OMKAR et al., 2011](#)) e ([PARSOPOULOS et al., 2004](#)) que apresentam as heurísticas vetoriais denominadas VEPSO, VEABC e VEDE, respectivamente. Essas heurísticas se propõem à resolução de problemas com dois objetivos, para tanto utilizam duas populações que de forma separada tratam de cada função objetivo. O modelo desenvolvido neste trabalho também trata separadamente cada população escolhendo qual a heurística irá atualizar ou evoluir cada uma com o diferencial de utilizar as três técnicas em uma só para conseguir uma melhor adaptação do modelo à um problema específico.

No trabalho desenvolvido por ([CARVALHO et al., 2016](#)) foi investigado um algoritmo genético adaptativo capaz de identificar a melhor combinação de operadores de crossover e mutação em tempo de execução. A adaptação envolve quatro métodos de cruzamento e três mecanismos de mutação. O algoritmo foi validado usando algumas funções de *benchmarks* multimodais mono-objetivas. Foi utilizado neste trabalho o método ANOVA e o teste de Tukey, concluindo que em geral, o algoritmo adaptativo funciona melhor do que a escolha estática dos operadores. Deste artigo o que influencia neste trabalho é o foco para a adaptação em tempo de execução.

Outra pesquisa realizada por [CARVALHO et al. \(2017\)](#) foca na execução paralela para a adaptação automática dos parâmetros relacionados aos coeficientes de cruzamento e mutação utilizados pelo algoritmo genético (GA). Dessa forma, o trabalho oferece quatro formas diferentes de *crossover* e três formas de mutação. A combinação adequada desses operadores permite a aplicação do algoritmo em diferentes tipos de problemas mono-objetivos que demandem diferentes combinações de operadores e

coeficientes. Em outras palavras, o objetivo é permitir que o mesmo algoritmo resolva de maneira adequada uma maior quantidade de problemas. Um teste de ANOVA associado com um teste de Tukey foram utilizados para comprovar a eficiência do algoritmo adaptativo. Deste artigo o que influência neste trabalho é o foco para a adaptação em tempo de execução com objetivo de atingir uma melhor eficiência da meta-heurística.

Um trabalho que contribui para a área de otimização multiobjetivo com influência sobre este trabalho é o artigo intitulado *An Adaptive Algorithm for Updating Population on SPEA2* que foi desenvolvido por [Costa, Cortes e Júnior \(2017\)](#). Nesse trabalho, o esforço foi direcionado para a melhoria do algoritmo denominado SPEA2 que é um algoritmo multiobjetivo sofisticado proposto por [Zitzler, e Thiele \(2001\)](#). A melhoria proposta para este algoritmo é sua adaptação automática, a qual permite que o SPEA2 escolha entre algoritmos genéticos (AG), evolução diferencial (DE) e partículas de enxame (PSO) para evoluir a população em tempo de execução. Assim, espera-se que a medida que o algoritmo evolui, a meta-heurística que produzir melhores soluções tenha sua probabilidade de escolha aumentada. Esta ideia de adaptação automática também é implementada pelo modelo desenvolvido neste trabalho.

Em 2017, o trabalho de [Chen Yangbin Lin \(2017\)](#) apresenta um *framework*, denominado e-NSLS, para a resolução do problema de seleção de Portfólios avaliado a partir dos testes realizados em conjuntos de *benchmark*. Este trabalho é qualificado a partir das métricas conhecidas por: distância geracional invertida e a *spread*. Deste trabalho o modelo desenvolvido absorve a ideia de atualização dos indivíduos em que é feita, em tempo de execução, a escolha aleatória de quantos genes de cada indivíduo passará por alterações. Isto diminui a complexidade computacional atingida com o aumento da quantidade de genes necessários para a resolução do problema, no caso da seleção de portfólios. A quantidade de genes que serão alterados é dada por:  
$$e = 2w * \sqrt{n}.$$

O artigo ([QU et al., 2017](#)) apresenta um algoritmo normalizado multiobjetivo baseado nas idéias do algoritmo de decomposição MOEA/D. Neste trabalho o modelo foi denominado NMOEA/D e foram utilizados 6 (seis) experimentos com configurações

diferentes para realizar uma análise comparativa entre a proposta e outras já conhecidas por MOEA/D, MODE-SS, MODE-NDS, MOCLPSO e NSGAI. Deste artigo o modelo AVMH tem em comum é o objetivo de resolução do Problema de Seleção de Portfólios.

Já um trabalho mais atual é o de [Borges, Cortes e Vieira \(2018\)](#) que tem por objetivo apresentar uma meta-heurística adaptativa baseada em algoritmo genético (GA), evolução diferencial (DE) e enxame de partículas (PSO). A escolha de qual algoritmo será executado é feita baseando-se na probabilidade de cada um, sendo uniforme no início da execução e atualizada a medida que o algoritmo evolui. O algoritmo que produzir melhores resultados tende a apresentar maior probabilidade de ser selecionado. A meta-heurística foi testada em quatro funções de *benchmark* durante 1000, 2000 e 3000 interações conseguindo apresentar melhores resultados que os algoritmos canônicos. Estes resultados foram comprovados com a utilização de um teste-t. Deste trabalho o modelo desenvolvido utiliza a ideia de escolha probabilística entre três meta-heurística.

O AVMH apresenta suas diferenças em relação aos trabalhos apresentados pelas características que podem ser citadas, tais como: o foco para resolução de problemas multiobjetivos quando comparados aos trabalhos ([CARVALHO et al., 2016](#)) e ([CARVALHO et al., 2017](#)); a investigação da interação entre as três meta-heurísticas vetoriais apresentadas em ([PARSOPOULOS; VRAHATIS, 2002](#)), ([OMKAR et al., 2011](#)) e ([PARSOPOULOS et al., 2004](#)); a inclusão da meta-heurística baseada em colônia artificial de abelhas para participar da interação quando comparado ao ([COSTA; CORTES; JÚNIOR, 2017](#)) e [Borges, Cortes e Vieira \(2018\)](#); e a investigação da análise vetorial em que cada população trabalha de forma independente sobre cada função para a resolução do problema de Seleção de Portfólios através do modelo de Markowitz quando comparado aos trabalhos ([CHEN YANGBIN LIN, 2017](#)) e ([QU et al., 2017](#)). A tabela 2 apresenta resumidamente essas semelhanças e diferenças entre os trabalhos.

Tabela 2 – Trabalhos Correlatos: Pontos em Comum e Diferenças

<b>1. VEPSO - Vector Evaluated Particle Swarm Optimization.</b> <b>2. VEDE - Vector Evaluated Differential Evolution.</b> <b>3. VEABC - Vector Evaluated Artificial Bee Colony.</b>	
<u>Pontos em Comum</u>	Foco na Implementação
<u>Diferenças</u>	Esses trabalhos apresentam cada proposta isoladamente, enquanto o AVEMH investiga a interação entre as três propostas.
<b>4. A stochastic adaptive genetic algorithm for solving unconstrained multimodal numerical problems.</b> <b>5. A parallel adaptive genetic algorithm for unconstrained multimodal numerical optimization.</b>	
<u>Pontos em Comum</u>	Foco na Adaptação
<u>Diferenças</u>	Esses trabalhos são mono-objetivos, enquanto o AVEMH investiga a solução para problemas multiobjetivos do mundo real.
<b>6. An adaptative algorithm for updating populations on spea2.</b> <b>7. An adaptive metaheuristic for unconstrained multimodal numerical optimization.</b>	
<u>Pontos em Comum</u>	Foco na Adaptação
<u>Diferenças</u>	Esses trabalhos utilizam o GA, enquanto que o AVEMH insere o VEABC e investiga a interação entre heurísticas vetórias.
<b>8. The mean-variance cardinality constrained portfolio optimization problem using a local search-based multi-objective evolutionary algorithm.</b> <b>9. Large-scale portfolio optimization using multiobjective evolutionary algorithms and preselection methods.</b>	
<u>Pontos em Comum</u>	Resolução do problema de Seleção de Portfólios
<u>Diferenças</u>	Método de Resolução: o artigo do item 8 é baseado em um algoritmo de busca local e o artigo do item 9 é baseado no método de pré-seleção de objetivos. Enquanto que o AVEMH é baseado no método de separação dos objetivos.

Fonte: Dados gerados neste trabalho

### 1.3 Justificativa

Nos problemas que envolvem situações comuns do dia-dia normalmente precisa-se enfrentar o envolvimento de várias restrições e objetivos conflitantes. Assim, apresentam-se os algoritmos evolutivos como uma das técnicas que se preocupa em analisar e otimizar esses objetivos conflitantes empenhando-se em atingir os melhores resultados respeitando-se os limites impostos. As aplicações do mundo real e o crescente interesse por problemas multiobjetivos tem priorizado a utilização destes algoritmos como solução para estas questões.(ZITZLER; DEB; THIELE, 2000)

Os EAs foram estabelecidos como um dos métodos disponíveis para explorar soluções em problemas multiobjetivos do mundo real já que estes problemas são muito complexos para serem resolvidos por métodos tradicionais, como a programação linear e a descida de gradiente (CRAINIC; TOULOUSE, 2003), pois: as funções precisam ser diferenciáveis, (ii) o espaço de busca é composto por muitas variáveis; e (iii) os métodos clássicos tendem a não tratar as restrições (Zhang; Fujimura, 2010).

Um problema relevante no mundo real é a otimização de portfólios, que pode ser aplicado em diversas áreas, tais como: seleção de projetos de pesquisa em instituições de ensino (RIBEIRO; ALVES, 2015), seleção de projetos esportivos (SANTOS, 2013), comercialização de energia elétrica (ARCE, 2014), avaliação de portfólios financeiros (QU et al., 2017), etc.

Este trabalho está focado na seleção de portfólios financeiros. A teoria original de seleção de portfólios financeiros surgiu com o trabalho de Markowitz (1952) que afirma que um investidor não selecionará ativos devido a apenas características que são particulares, mas sim precisará considerar como cada ativo interage com os outros. Além disso, levando em conta essas interações um investidor pode construir um portfólio que tenha um menor risco dado o mesmo retorno esperado, ao invés de um portfólio construído, ignorando as interações existentes entre os títulos (QU et al., 2017). O modelo de Markowitz (1952) assume que investidores tomam suas decisões na construção de portfólios escolhendo ativos que maximizem seus retornos no fim

do período de investimento (retorno esperado) assumindo um certo nível de risco, ou minimizando o risco com certo nível de retorno.

## 1.4 Objetivos

### 1.4.1 Objetivo Geral

Propor e implementar uma meta-heurística adaptativa baseada em vetor de avaliações para otimização de portfólios de investimentos.

### 1.4.2 Objetivos Específicos

- Verificar o funcionamento dos algoritmos PSO, ABC, DE, como exposto na seção [2.2.2.1](#), na seção [2.2.2.2](#) e na seção [2.2.2.3](#);
- Avaliar o funcionamento dos algoritmos PSO, ABC, DE como apresentado nas tabelas [10](#) e [14](#);
- Implementar a meta-heurística proposta - AVEMH, como detalhado na seção [3](#);
- Aplicar o trabalho em um problema do mundo real conhecido por Seleção de Portfólios, seção [2.3](#);
- Avaliar as funções de risco e retorno para o problema escolhido, seção [2.3](#) e [4](#);
- Avaliar o modelo em termos da eficácia dos resultados obtidos a partir do cálculo do melhor hipervolume, resultados apresentados na seção [4](#).

## 1.5 Organização da Dissertação

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo [1](#) apresentam-se as ideias introdutórias da dissertação, trabalhos correlatos, justificativas e objetivos. No capítulo [2](#) são apresentados os referenciais teóricos que servem como embasamento para o

desenvolvimento deste trabalho, tais como: problemas multiobjetivos, meta-heurísticas, algoritmos evolucionários multiobjetivos, algoritmo de otimização por exame de partículas, algoritmo de colônia artificial de abelhas, algoritmo da evolução diferencial, e a teoria sobre o problema de seleção de portfólios. No capítulo 3 apresenta-se o trabalho desenvolvido com as especificações e parâmetros adotados. No capítulo 4 são apresentados os resultados atingidos para as Zdt's e o PSP. Já o capítulo 5 traz a conclusão desta dissertação, contribuições e as pesquisas futuras que podem ser exploradas. No anexo A é possível verificar as informações relacionadas ao artigo gerado a partir deste trabalho. Nos anexos B, C, D, E, F são apresentadas as empresas que possuem ações que compõe os conjuntos de dados analisados.

## 2 Referencial Teórico

Neste capítulo são apresentados os conceitos básicos sobre os temas utilizados neste trabalho. Nas próximas seções apresenta-se a teoria que envolve problemas multiobjetivos, heurísticas, meta-heurísticas, funções de *benchmark* para MOP's, métricas para MOP's e a teoria sobre o problema da Seleção de Portfólios.

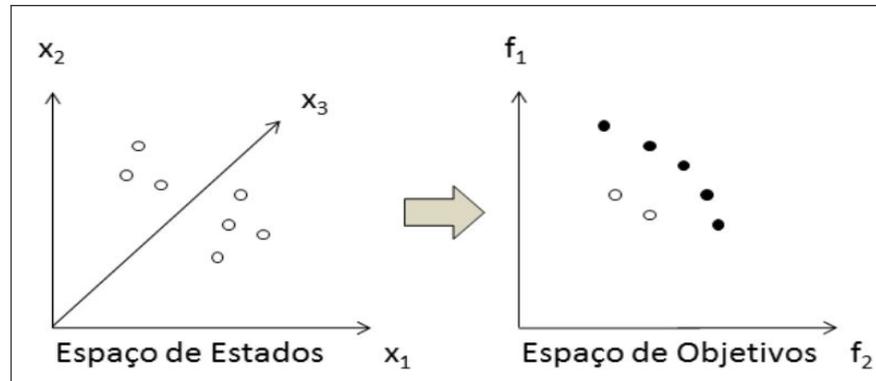
### 2.1 Problemas Multiobjetivos

Um problema de otimização multiobjetivo (MOP) possui dois ou mais objetivos que devem ser otimizados, sendo que esses objetivos devem ser conflitantes, isto é, a melhora de um objetivo significa necessariamente a piora em outro. Dessa forma, um MOP com restrições de domínio tem a forma apresentada na Equação 2.1, na qual  $m$  é a quantidade de funções,  $i$  representa a quantidade de variáveis do vetor  $x$ , e  $L_i, L_s$  são respectivamente o limite inferior e o limite superior de cada variável.

$$\begin{aligned} \text{Min ou Max } f_m(x), m = 1, 2, \dots, M & \quad (2.1) \\ L_i \leq x_i \leq L_s, i = 1, 2, \dots, D & \end{aligned}$$

Diferentemente dos problemas de otimização com objetivo único, onde apenas o espaço de estado (ou espaço de busca) interessa, nos MOP's é necessário mapear o espaço de estados (representado por  $\vec{x}$ ) para um espaço de objetivos representados por  $f_m(x)$  como mostra a Figura 1, que apresenta o mapeamento de 7 (sete) soluções no espaço de estados para o espaço de funções, considerando uma dimensão de 3 (três) para  $\vec{x}$  e duas funções objetivo (DEB, 2001).

Figura 1 – Mapeamento entre espaço de estados e espaço de objetivos



Fonte: Adaptado de Deb (2001)

Na próxima subseção é apresentado o conceito de dominância de Pareto.

### 2.1.1 Dominância de Pareto

A dominância de Pareto foi introduzida por Vilfredo Pareto ainda no século XIX, representando o início das pesquisas em otimização multiobjetivo (FARIAS, 2008). A definição de dominância de Pareto surgiu da percepção de que uma solução é melhor que outra se a primeira for melhor em pelo menos um objetivo e não for pior em nenhum outro objetivo. Este conceito é importante na resolução de MOP's e utilizado em diversos algoritmos evolutivos e de enxame (DEB, 2001).

A Figura 1 mostra, além do mapeamento, o espaço de objetivos onde as 5 (cinco) soluções em preto representam as soluções não dominadas, enquanto que as mais claras são soluções dominadas. As soluções não dominadas é um conjunto de soluções na qual nenhuma solução é melhor do que a outra, formando o que se chama de fronteira de Pareto. Assim, uma solução  $x^k$  domina uma solução  $x^m$  se: (i)  $x^k$  não é pior do que  $x^m$  em todos as funções objetivo; e, (ii) a solução  $x^k$  é estritamente melhor do que  $x^m$  em pelo menos um objetivo. Matematicamente diz-se que:

$$x^k \preceq x^m \quad (2.2)$$

Na próxima subseção é apresentado o conceito de soluções ótimas de Pareto.

### 2.1.2 Otimalidade de Pareto

Como explicado por Deb (2001) uma solução  $\vec{x}^* \in F$  será considerada Pareto ótima, se somente se, não existir outra solução  $\vec{x}$  que domine  $\vec{x}^*$ . Em problemas multiobjetivo procura-se por soluções ótimas de Pareto. Neste caso, consistindo de um conjunto de soluções ótimas e não de apenas uma solução. Este conjunto de soluções ótimas é denominado “Conjunto de Ótimos Pareto”.

### 2.1.3 Métodos de Resolução para Problemas Multiobjetivos

Um problema multiobjetivo pode ser resolvido por um dos 4 (quatro) métodos difundidos na literatura, denominados: (a) método baseado em pesos; (b) método baseado em conjuntos Pareto; (c) método de priorização de objetivos (d) e o método baseado em separação de objetivos (LINDEN, 2008a).

Nos métodos baseados em pesos a avaliação dos indivíduos consiste em transformar o vetor de funções em um único escalar através da aplicação de pesos. A segunda abordagem utiliza conjuntos de Pareto e a qualidade do indivíduo é dada pela quantidade de soluções que o dominam. E o terceiro método é considerado uma extensão deste. Na priorização de objetivos é utilizado um vetor que guarda a prioridade para cada objetivo.

O método baseado em separação de objetivos consiste em tratar cada função de forma independente. É o método utilizado por esta pesquisa. Os problemas Zdt's e a Seleção de Portfólios foram formulados a partir da abordagem que consiste em fazer comparações entre dois indivíduos; neste caso são considerados o indivíduo migrado e o melhor indivíduo já consolidado, considerando o objetivo previamente escolhido para cada população. Para saber mais sobre métodos para resolução de problemas multiobjetivos é possível encontrar uma leitura inicial em (LINDEN, 2008a).

Na próxima seção são apresentadas algumas funções de benchmark utilizadas neste trabalho.

## 2.1.4 Funções de *Benchmark*

### 2.1.4.1 Problemas Zdt's

As funções de *benchmark* para problemas multiobjetivos propostas por Zitzler, Deb e Thiele são conhecidas por ZDT's (ZITZLER; DEB; THIELE, 2000). As ZDT's são funções de minimização específicas utilizadas para avaliar a qualidade das soluções obtidas por algoritmos multiobjetivos. A Tabela 3 apresenta formalmente cada ZDT, as configurações para as funções de avaliação  $f_1$  e  $f_2$ , o domínio do problema e a quantidade de genes que devem ser utilizadas para execução de cada teste.

Tabela 3 – Funções ZDT

Nome	Funções	Domínio
ZDT1	$\vec{f}: \mathfrak{R}^{30} \longrightarrow \mathfrak{R}^2, \text{ onde}$ $f_1 = X_1$ $g(x) = 1 + (9/n - 1) * (\sum_{i=2}^k x_i)$ $f_2 = g(x) * [1 - \sqrt{x_1/g(x)}]$	$x_i \in [0, 1]$ $i = 1, \dots, 30$
ZDT2	$\vec{f}: \mathfrak{R}^{30} \longrightarrow \mathfrak{R}^2, \text{ onde}$ $f_1 = X_1$ $g(x) = 1 + (9/n - 1) * (\sum_{i=2}^k x_i)$ $f_2 = g(x) * [1 - (x_1/g(x))^2]$	$x_i \in [0, 1]$ $i = 1, \dots, 30$
ZDT3	$\vec{f}: \mathfrak{R}^{30} \longrightarrow \mathfrak{R}^2, \text{ onde}$ $f_1 = X_1$ $g(x) = 1 + (9/n - 1) * (\sum_{i=2}^k x_i)$ $f_2 = g(x) * [1 - \sqrt{x_1/g(x)} - x_1/g(x) * \sin(10\pi x_1)]$	$x_i \in [0, 1]$ $i = 1, \dots, 30$
ZDT4	$\vec{f}: \mathfrak{R}^{10} \longrightarrow \mathfrak{R}^2, \text{ onde}$ $f_1 = X_1$ $g(x) = 1 + 10 * (n - 1) + (\sum_{i=2}^k (x_i^2 - 10 * \cos(4\pi x_i)))$ $f_2 = g(x) * [1 - \sqrt{x_1/g(x)}]$	$x_1 \in [0, 1],$ $x_i \in [-5, 5], \forall i \neq 1$ $i = 1, \dots, 10$
ZDT6	$\vec{f}: \mathfrak{R}^{10} \longrightarrow \mathfrak{R}^2, \text{ onde}$ $f_1 = 1 - e^{-4x_1} * \sin^6(6\pi x_1)$ $g(x) = 1 + 9 * [\sum_{i=2}^n x_i / (n - 1)]^{0.25}$ $f_2 = g(x) * [1 - (f_1/g(x))^2]$	$x_i \in [0, 1]$ $i = 1, \dots, 10$

Fonte: (ZITZLER; DEB; THIELE, 2000)

Cada função ZDT possui a seguinte estrutura  $f_1$ ,  $g$  e  $f_2$ . A equação  $f_1$  é em função da primeira variável de decisão;  $g$  é em função das demais variáveis e  $f_2$  é

função de  $f_1$  e  $g$ . O problema ZDT1 apresenta uma fronteira de Pareto convexa; já a fronteira ótima para a ZDT2 apresenta-se concava; a ZDT3 apresenta uma fronteira ótima não-contínua; a ZDT4 apresenta uma diferença no espaço de busca para a primeira dimensão; e a ZDT6 apresenta uma fronteira de Pareto não-uniforme com pouca densidade próximo à fronteira de Pareto e alta densidade ao se afastar dela (ZITZLER; DEB; THIELE, 2000).

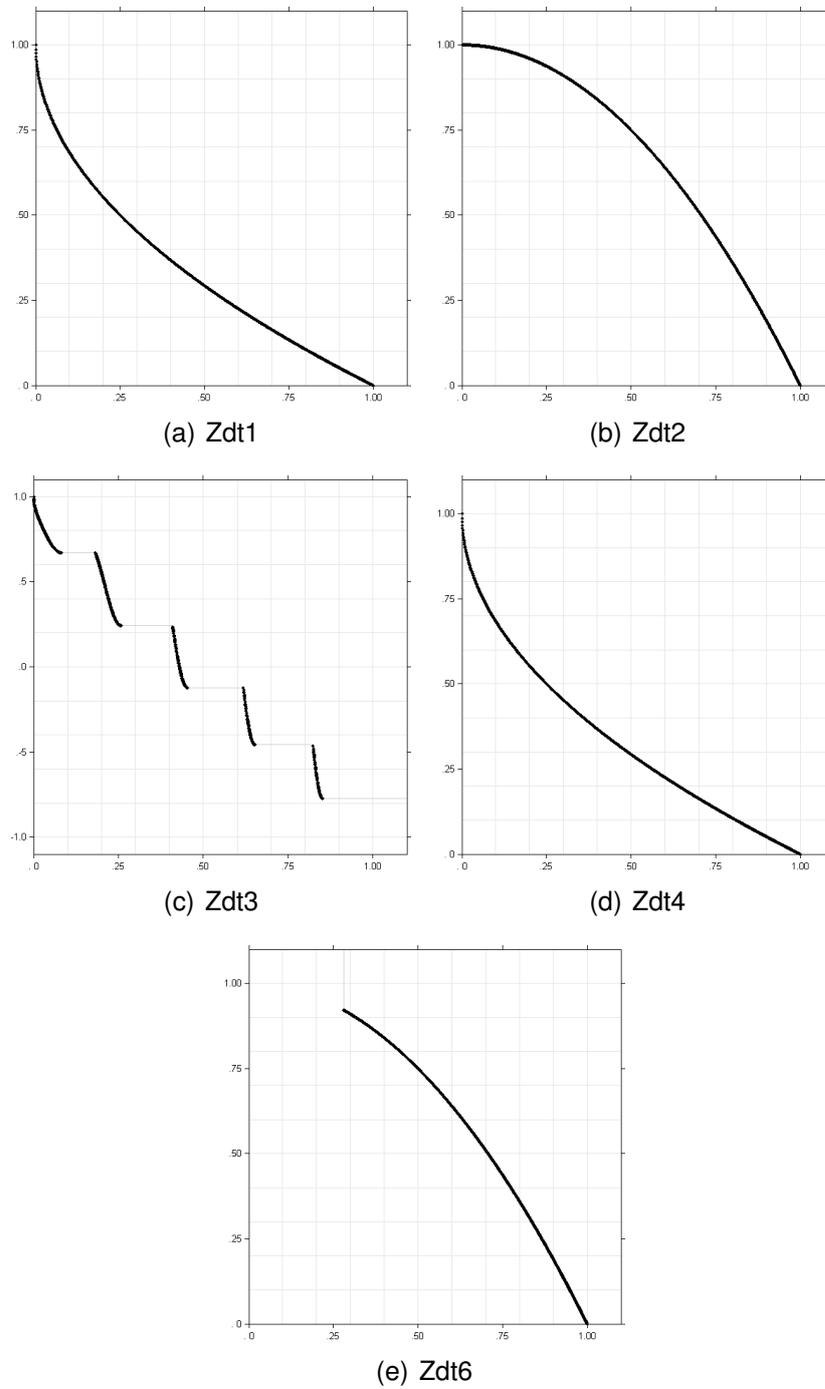
O conjunto de soluções obtidas nos testes devem ser o mais próximo da fronteira de Pareto. A fronteira de Pareto esperada para cada ZDT está apresentada na Figura 2.

Já a Tabela 4 apresenta os hipervolumes considerados ótimos para cada ZDT em relação à quantidade de indivíduos ( $\mu$ ) utilizados. Nesta tabela apresenta-se somente os hipervolumes para  $\mu$  igual a 100 (cem); hipervolumes para outras quantidades de  $\mu$  podem ser pesquisados em (ZITZLER; DEB; THIELE, 2000).

Tabela 4 – Hipervolumes ótimos para  $\mu = 100$

Função	$\mu$	Hipervolume
ZDT1	100	120.662137
ZDT2	100	120.328881
ZDT3	100	128.775955
ZDT4	100	120.662137
ZDT6	100	117.514950

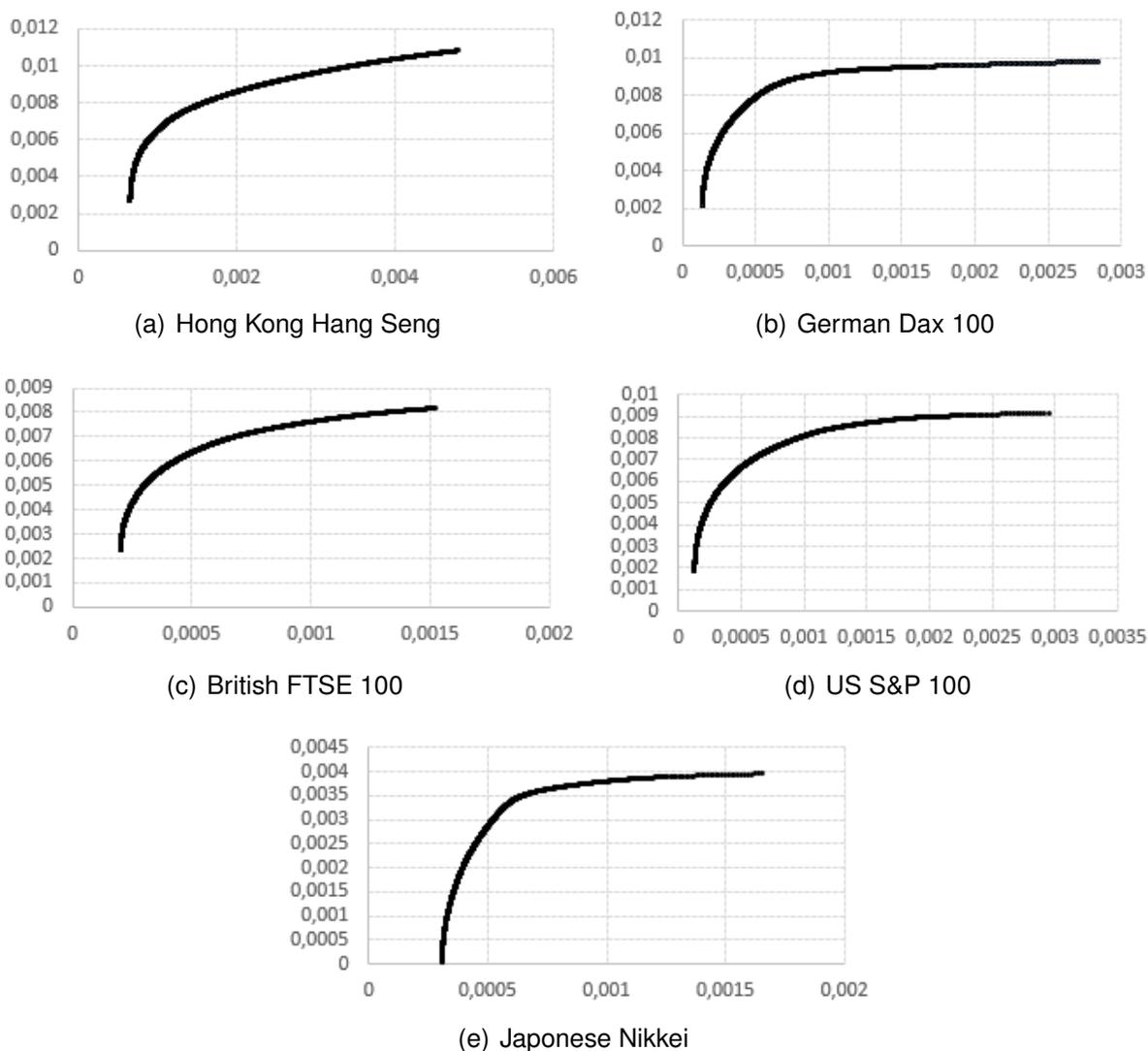
Fonte: Disponível em (ETH, 2018)

Figura 2 – Fronteira Real das Funções de *Benchmark* ZDT'sFonte: Disponível em ([ETH, 2018](#))

### 2.1.4.2 Problemas de Seleção de Portfólios

Para a Seleção de Portfólios a Figura 3 apresenta a fronteira eficiente dos arquivos de testes. Os conjuntos de dados utilizados para formar essas fronteiras eficientes estão disponíveis em <http://people.brunel.ac.uk/~mastjib/jeb/orlib/portinfo.html>. Neste trabalho, utiliza-se os conjuntos de dados ‘Hong Kong Hang Seng’, ‘German Dax 100’, ‘British FTSE 100’, ‘US S&P 100’ e ‘Japanese Nikkei’ representados por suas siglas HSI, DAX, FTSE, S&P 100 e Nikkei 225, respectivamente. E estes conjuntos de dados são compostos por 63, 85, 89, 98 e 225 ativos, respectivamente.

Figura 3 – Fronteira real das funções de *benchmark* para a Seleção de Portfólios.



Fonte: Dados gerados neste trabalho a partir de informações disponíveis em <http://people.brunel.ac.uk/~mastjib/jeb/orlib/portinfo.html>

Nestes conjuntos de dados são disponibilizados a média dos retornos dos ativos, o desvio padrão dos retornos e a correlação entre esses ativos.

O Hong Kong Hang Seng, conhecido oficialmente como ‘Hang Seng Index’ (HSI), é o principal índice da bolsa de valores de Hong Kong. Pode-se dizer que o Hang Seng é um dos índices mais importantes no mercado financeiro internacional composto por 10 empresas, apresentadas no anexo B. Sua relevância está ligada ao fato de ser a China o país que mais cresce atualmente em termos de economia (REIS, 2019b). Já o índice German Dax, conhecido por ‘DAX Índice’, é formado pelas maiores empresas da Bolsa de Valores de Frankfurt (DISFORD, 2019a) na Alemanha, apresentadas no anexo C. O British FTSE é composto por 30 maiores empresas de capital aberto do Reino Unido, conhecido por ‘FTSE’ este índice afeta muito a economia britânica e mundial. Este índice representa 70% da capitalização na Bolsa de Valores de Londres (DISFORD, 2019b). As empresas que possuem ações que formam este índice estão apresentadas no anexo D. O S&P 100 é um índice do mercado de ações norte-americano mantido pela Standard & Poor’s. Devido à popularidade dessas opções, os investidores geralmente se referem ao índice por seu símbolo “OEX”. É formado por 101 empresas com ações na bolsa de valores NYSE e NASDAQ (INDICES, 2019), apresentadas no anexo E. Por fim, o Japonês Nikkei, conhecido por ‘Nikkei 225’ é o principal índice econômico da bolsa de valores de Tóquio (NIKKEI..., 2019). As empresas que compõem este índice estão apresentadas no anexo F.

A teoria sobre o problema de Seleção de Portfólios é explicada com mais detalhes na seção 2.3.

Na próxima seção são apresentadas resumidamente as métricas que podem ser utilizadas para medir a qualidade de um MOEA. Sendo apresentada mais detalhadamente a métrica que é utilizada para medir os resultados desta pesquisa.

## 2.1.5 Métricas para Problemas Multiobjetivos

A análise dos MOEA's deve ser feita a partir de uma ou mais métricas que qualifiquem as soluções e permita compará-las com outras soluções atingidas por outros MOEA's. Na utilização das métricas pretende-se encontrar: (ZITZLER, 1999).

- Os indivíduos que estão na menor distância possível da fronteira Pareto-ótima;
- Encontrar os indivíduos de maior diversidade;
- Encontrar maior dispersão de indivíduos sobre o espaço de busca.

A seguir apresenta-se algumas métricas disponíveis na literatura.

### 2.1.5.1 Métricas de Convergência

As métricas de convergência avaliam a que distância a fronteira de Pareto encontrada está da fronteira de Pareto Ótima (GROSAN; OLTEAN; DUMITRESCU, 2003). Podendo ser representada pela taxa de erro, pela distância geracional e hipervolume.

### 2.1.5.2 Métricas de Diversidade

As métricas de diversidade tem por objetivo verificar a dispersão das soluções sobre a curva de Pareto (CHENG; SHI; QIN, 2012). Podendo ser representada pelo espaçamento, pelo número de nichos, e pelo espalhamento.

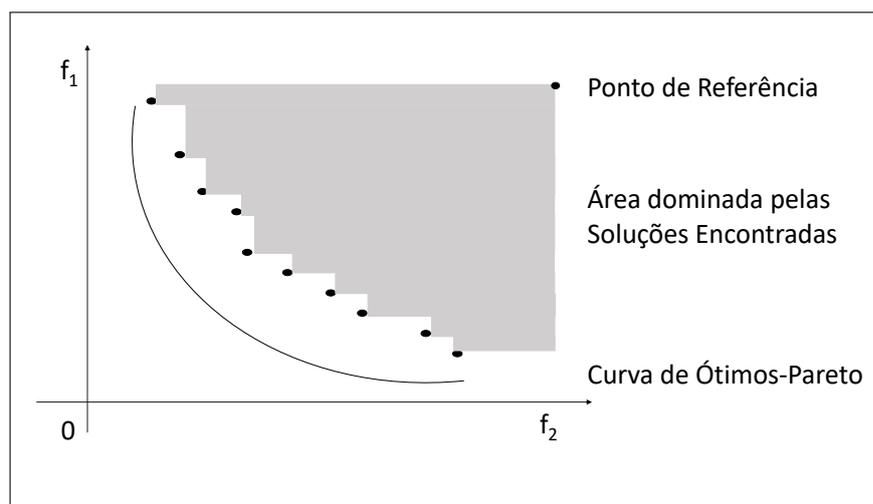
A métrica utilizada neste trabalho é o hipervolume apresentado na Equação 2.3, na qual  $v_i$  representa um hipercubo construído a partir das soluções da fronteira de Pareto (conjunto  $\mathcal{Q}$ ).

$$h_v = \text{volume}\left(\bigcup_{i=1}^{|\mathcal{Q}|} v_i\right) \quad (2.3)$$

Assim, o hipervolume total é calculado pela união de todos os hipercubos  $v_i$ .

Ilustrativamente, o hipervolume pode ser representado como a área formada pelas soluções não dominadas e um ponto de referência. Esta referência pode ser determinada pelo vetor de piores valores de cada função objetivo ou ainda por valores fora do espaço de objetivos (ETH, 2018). A figura 4 apresenta esta ilustração.

Figura 4 – Ilustração do Hipervolume



Fonte: Adaptado de (BRADSTREET, 2011) e de (FONSECA et al., 2017).

O hipervolume é uma das métricas mais utilizadas em pesquisas com MOEA's. Nessa métrica, um alto valor de hipervolume indica que houve um elevado espalhamento entre as soluções Pareto-Ótimas encontradas e indica, também, que houve uma maior convergência, pois a convergência aumenta o volume em relação ao ponto de referência (ZITZLER; THIELE, 1998b).

Na próxima seção apresenta-se conceitos sobre as meta-heurísticas utilizadas no desenvolvimento deste trabalho.

## 2.2 Meta-Heurística

Uma heurística é um método teórico conseguido através da observação de determinado fenômeno (BARBOSA, 2010). Computacionalmente, as heurísticas são representadas por algoritmos que tendem a encontrar soluções ótimas ou encontrar soluções próximas às ótimas (LINDEN, 2008b).

De acordo com [Crainic e Toulouse \(2003\)](#) as meta-heurísticas são métodos que coordenam procedimentos de busca local e estratégias para escapar de mínimos locais em espaços de buscas com soluções complexas. As meta-heurísticas devem ser utilizadas em problemas sobre os quais se tem pouca informação e é muito custoso computacionalmente testar todas as possíveis soluções. As meta-heurísticas são reconhecidas como ferramentas essenciais para resolver problemas difíceis em diversos campos, isto por oferecerem uma abordagem prática para resolver problemas complexos do mundo real. Esta é uma preocupação para atender às necessidades crescentes nas áreas da pesquisa e da indústria.

Na resolução de problemas com meta-heurísticas é essencial analisar a qualidade das soluções obtidas. No entanto, as meta-heurísticas não garantem encontrar todas as soluções ótimas, além disso, a performance depende da configuração do problema em particular. Dessa forma, não se deve focar os esforços somente no desempenho, mas também em criar sistemas robustos para que se consiga lidar com vários tipos de problemas. Uma questão importante no projeto com meta-heurísticas é como construí-los para se obter o máximo de desempenho; em segundo lugar é preocupar-se em fazê-los robustos, no sentido de que possam oferecer um nível alto de desempenho em uma ampla variedade de configurações e características de diversos problema ([CRAINIC; TOULOUSE, 2003](#)).

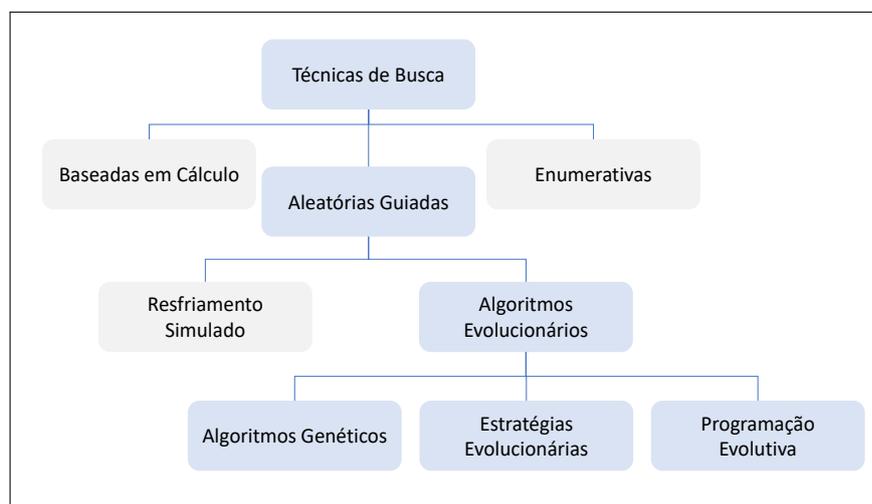
### 2.2.1 Algoritmos Evolucionários

Os algoritmos evolucionários são heurísticas baseadas em modelos de processos naturais de evolução e de interação entre os indivíduos. Eles surgiram a partir de teorias que afirmam que a natureza otimiza seus mecanismos para resolver problemas de alta complexidade através da alocação de recursos com objetivo de sobrevivência ([BENTLEY, 1999](#)).

Os algoritmos evolucionários se posicionam como técnicas de busca. Eles fazem parte de um ramo da busca chamado de Técnicas Aleatórias Guiadas, por possuírem componentes aleatórios, mas utilizarem informações sobre o seu estado corrente

possibilitando a auto-organização e o comportamento adaptativo (MARTINO, 2015 apud BITTENCOURT, 1996). A Figura 5 posiciona os algoritmos evolucionários como métodos de busca.

Figura 5 – Posição dos algoritmos evolucionários como métodos de busca



Fonte: Adaptado de Linden (2008b)

Como ilustrado na Figura 5, teoricamente os métodos que compõem os algoritmos evolucionários são (GABRIEL; DELBEM, 2008): o Algoritmo Genético (AG do inglês, *Genetic Algorithm*) (PEREIRA, 2019 apud HOLLAND, 1992), as Estratégias Evolutivas (ES do inglês, *Evolution Strategy*) (RECHENBERG; TOMS; ESTABLISHMENT, 1965), (SCHWEFEL, 1975) e a Programação Evolutiva (EP do inglês, *Evolutionary Programming*) (FOGEL, 2006).

O algoritmo genético foi inventado por John Holland na década de 1960 e desenvolvido até 1970, utilizando como referência a Teoria da Evolução Natural descrita por Darwin. Em 1975, John Holland formalizou e apresentou os algoritmos genéticos através do livro “*Adaptation in Natural and Artificial Systems*”, fazendo uma abstração da evolução biológica e criando um quadro teórico que serviu para a fundamentação dos algoritmos evolutivos, tornando possível simular os mecanismos de adaptação natural que ocorrem na natureza através da implementação computacional (PEREIRA, 2019 apud HOLLAND, 1992).

As estratégias evolutivas foram criadas em 1960 por Bienert, Rechenberg e Schwefel, e complementado em 1975 por Schwefel tendo como principal objetivo resolver problemas diversos de otimização (GABRIEL; DELBEM, 2008).

Já a programação evolutiva formalizada por Fogel, Owens e Walsh em 1966 (FOGEL, 1999) foi desenvolvida com o objetivo de solucionar problemas específicos, sendo originalmente proposta como forma de produzir inteligência artificial capaz de gerar a evolução em máquinas (NAVARRO, 2000).

Essas definições correspondem aos métodos nas suas formações originais, mas atualmente elas são generalizadas e classificadas apenas como algoritmos evolutivos, devido à possibilidade de diferentes combinações dos seus componentes, que são estruturados para atender a objetivos específicos (MARTINO, 2015).

Dessa forma, através dos algoritmos evolutivos, a evolução biológica foi incorporada à ciência da computação contribuindo para a formação de uma área específica denominada computação evolucionária (BANSAL; PAL, 2019). Conceitualmente a Computação Evolucionária é um ramo da Computação Inteligente que é constituída de um conjunto de metodologias inspiradas em ideias biológicas para resolver problemas complexos do mundo real (BANSAL; PAL, 2019).

## 2.2.2 Algoritmos Evolucionários Multiobjetivos

Os MOP's têm despertado grande interesse na área de otimização. Para estes problemas não existe somente uma solução, mas sim um conjunto de soluções ótimas (DEB, 2001) e os MOEA's representam a técnica indicada para a resolução destes problemas.

O primeiro MOEA desenvolvido foi proposto por Schaffer em 1985 e denominado VEGA do inglês, *Vector Evaluated Genetic Algorithm*. Este algoritmo trabalha como um Algoritmo Genético modificado avaliando cada objetivo separadamente. Um dos problemas do algoritmo proposto por Schaffer é que as soluções obtidas, em geral, possuem baixa diversidade.

Para resolver esse problema Goldberg em 1989 criou um procedimento que ordena as soluções baseado-se no conceito de dominância e fornece um valor de aptidão para uma solução proporcional ao número de soluções que esta domina (Deb et al., 2002). Para manter a diversidade das soluções, Goldberg sugeriu a utilização de um método de compartilhamento que calcula o nicho de cada solução dentro da fronteira que a solução pertence. Com base nas ideias iniciais de Goldberg, foram propostos vários modelos de MOEAs.

Os modelos de MOEAs são usualmente classificados em dois grupos (DEB, 2001):

- Não elitistas: compreendem os modelos que como o próprio nome indica, não utilizam nenhuma forma de elitismo nas suas interações;
- Elitistas: compreendem os modelos que empregam alguma forma de elitismo. Por exemplo, como o SPEA (ZITZLER; THIELE, 1998a) e o PESA (KNOWLES; CORNE, 2000a) que utilizam uma população externa para armazenar as soluções não dominadas encontradas até o momento.

Em algumas propostas, como MOGA (FONSECA; FLEMING, 1993) e SPEA (ZITZLER; THIELE, 1998a), o valor de aptidão é proporcional à dominância da solução. Outros métodos, como NPGA (HORN; GOLDBERG, 1994), utilizam a dominância e não calculam um valor de aptidão (ZITZLER, 1999).

O NSGA-II (DEB et al., 2002) combina a população atual com a população gerada e preserva as melhores soluções de ambas. Nesse estudo Deb et al. (2002) concluiu que o elitismo melhora as soluções encontradas por um modelo de MOEA. Na Tabela 5 são apresentados os principais modelos de MOEA's e seus autores.

A aplicabilidade dos MOEA's envolve diversas áreas para a resolução de problemas do mundo real, tais como auxílio na construção de projetos de arquitetura (MARTINO, 2015), na resolução do problema conhecido por "Predição de Estruturas de Proteínas"(GABRIEL; MELO; DELBEM, 2012), na resolução do problema conhecido

Tabela 5 – Cronologia de Propostas para MOEAs.

Sigla	Nome do Modelo	Autores
VEGA	Vector Evaluated Genetic Algorithm	( <a href="#">SCHAFFER, 1985</a> )
WBGA	Weigth Based Genetic Algorithm	( <a href="#">HAJELA; LIN, 1992</a> )
MOGA	Multiple Objective Genetic Algorithm	( <a href="#">FONSECA; FLEMING, 1993</a> )
NSGA	Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm	( <a href="#">SRINIVAS; DEB, 1994</a> )
NPGA	Niched Pareto Genetic Algorithm	( <a href="#">HORN; GOLDBERG, 1994</a> )
TDGA	Thermodynamical Genetic Algorithm	( <a href="#">KITA et al., 1996</a> )
PPES	Predator-Prey Evolution Strategy	( <a href="#">LAUMANN; RUDOLPH, 1998</a> )
SPEA	Strenght Pareto Evolutionary Algorithm	( <a href="#">ZITZLER; THIELE, 1998a</a> )
REMOEA	Rudolph's Elitist Multi-Objective Evolucionary Algorithm	( <a href="#">RUDOLPH, 1998</a> )
MONGA I	Multiobjective Messe Genetic Algorithm I	( <a href="#">VELDHUIZEN; LAMONT, 2000a</a> )
MONGA II	Multiobjective Messe Genetic Algorithm II	( <a href="#">VELDHUIZEN; LAMONT, 2000b</a> )
NSGA II	Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm	( <a href="#">DEB et al., 2000</a> )
PAES	Pareto-Archived Evolutionary Strategy	( <a href="#">KNOWLES; CORNE, 1999</a> )
M-PAES	A Memetic Pareto-Archived Evolutionary Strategy	( <a href="#">KNOWLES; CORNE, 2000b</a> )
PESA I	Pareto Enveloped-Base Selection Algorithm I	( <a href="#">CORNE; OATES, 2000</a> )
NPGA II	Niched Pareto Genetic Algorithm II	( <a href="#">ERICKSON; HORN, 2001</a> )
Micro-GA	Multi-Objective Micro-Genetic Algorithm	( <a href="#">COELLO; PULIDO, 2001</a> )

Tabela 5 - Cronologia de Propostas para MOEAs (Continuação)

Sigla	Nome do Modelo	Autores
SPEA 2	Strenght Pareto Evolutionary Algorith 2	(ZITZLER; THIELE, 2001)
PESA II	Pareto Enveloped-Base Selection Algorithm II	(CORNE et al., 2001)
VEPSO	Vector Evaluated Particle Swarm Optimization	(PARSOPOULOS; VRAHATIS, 2002)
ISPEA	Immunity SPEA	(HONGYUN; SANYANG, 2003)
CAEP	Cultural Algorithm with Evolutionary Programming	(COELLO; BECERRA, 2003)
Micro-GA 2	Multi-Objective Micro Genetic Algorithm 2	(PULIDO; COELLO, 2003)
MPGA	Multi-Population Genetic Algorithm	(COCHRAN; FOWLER, 2003)
SPEA 2 +	Improving the Performance of the Strenght Pareto Evolutionary Algorith 2	(KIM et al., 2004)
MOPSO	Multi-Objective Particle Swarm Optimization	(COELLO; LECHUGA, 2004)
ParEGO	Pareto Efficient Global Otimization	(KNOWLES, 2004)
VEDE	Vector Evaluated Differential Evolution	(PARSOPOULOS et al., 2004)
GOA	Grasshopper Optimization Algorithm	(TOPAZ et al., 2007)
MOEA/D	Multiobjective Evolutionary Algorithm based on Decomposition	(Zhang; Li, 2007)
VEABC	Vector Evaluated Artificial Bee Colony	(OMKAR et al., 2011)
VEPBIL	Vector Evaluated Population Based Incremental Learning	(CORTES; RAU-CHAPLIN, 2015)
MOGOA	Multi-objective grasshopper optimization algorithm	(MIRJALILI et al., 2017)
SHO	Spotted Hyena Optimizer	(DHIMAN; KUMAR, 2017)
MOSHO	Multi-objective Spotted Hyena Optimizer	(DHIMAN; KUMAR, 2018)

Fonte: Adaptado de (KUNKLE, 2005)

por "Despacho Econômico/Ambiental"(QU et al., 2018), na resolução de problemas de engenharia (DHIMAN; KUMAR, 2018), (MANHEIM; DETWILER, 2019), na resolução de problemas de roteamento de fluxos em redes de computadores (FERNANDES, 2019), na programação de ferrovias (NITISIRI; GEN; OHWADA, 2019) etc.

Dentre as meta-heurísticas escolhidas para a realização deste trabalho está o PSO, do inglês *Particle Swarm Optimization*, que realiza a otimização por enxame de partículas. O ABC, do inglês *Artificial Bee Colony* que realiza a otimização baseando-se no comportamento social das Colônias de Abelhas e o DE, do inglês *Differential Evolution* que realiza a otimização pelo método da Evolução Diferencial. Estes algoritmos são apresentados nas próximas subseções.

#### 2.2.2.1 Otimização por Enxame de Partícula

Os pesquisadores Kennedy e Eberhart (1995) desenvolveram o algoritmo PSO segundo a metodologia de sistemas sociais baseando-se no comportamento coletivo de indivíduos que interagem entre si e com o ambiente em torno de um ponto contendo comida ou local para descanso. Este tipo de sistema é conhecido também como inteligência de enxame.

Os passos seguidos durante a execução do algoritmo PSO estão apresentados no Algoritmo 1:

---

**Algoritmo 1** Particle Swarm Otimization. Fonte (KENNEDY; EBERHART, 1995)

---

**Entrada:** Inicializar parâmetros;

1: **Repita:**

2:   Calcular a velocidade das partículas;

3:   Atualizar as posições das partículas;

4:   **Se** se posição atual melhor que histórico **Então:**

5:     Atualizar histórico;

6:   **Fim Se**

7:   **Se** se posição atual melhor que global **Então:**

8:     Atualizar global;

9:   **Fim Se**

10: **Até:** o critério de parada ser atingido.

**Saída:** População Atualizada.

---

A inicialização das partículas ( $X$ ) se dá de forma aleatória dentro do domínio da dimensão do problema. A velocidade ( $V$ ) pode ser tanto inicializada por um valor aleatório quanto por um valor fixo. Após calcular o *fitness* de todo o enxame, atualiza-se a posição global ( $g$ ), que é a posição da melhor solução encontrada (o *fitness* de  $g$  é chamado de *gbest*), e o histórico de cada partícula ( $P$ ), que na inicialização vai conter os mesmos valores de inicialização e de avaliação do enxame. Ao entrar no laço a velocidade das partículas é atualizada a partir da Equação 2.4, na qual  $w$  é uma constante de inércia,  $c_1$  e  $c_2$  são constantes aceleradoras,  $r_1$  e  $r_2$  são números aleatórios no intervalo  $[0, 1]$ ,  $g$  é a posição da melhor partícula (melhor solução) e  $p_k$  é o melhor valor encontrado pela partícula  $k$ .

$$v_{k+1} = wv_k + c_1 * r_1(p_k - x_k) + c_2 * r_2(g - x_k) \quad (2.4)$$

Em seguida, a posição da partícula é atualizada pela Equação 2.5, ou seja, a nova posição é computada pela posição atual mais a velocidade recém calculada.

$$x_{k+1} = x_k + v_{k+1} \quad (2.5)$$

Se  $x_{k+1}$  ultrapassar o domínio, o mesmo pode ser redefinido como o limite máximo que foi ultrapassado. Deve-se observar também que a velocidade pode também ser limitada no intervalo  $[v_{min}, v_{max}]$ . Essa restrição evita que haja uma explosão de velocidade nas partículas, o que geraria problemas tanto de exploração quanto na busca local do algoritmo.

#### 2.2.2.2 Colônia Artificial de Abelhas

O algoritmo ABC, foi proposto por [Karaboga e Basturk \(2007\)](#), sendo baseado no comportamento das abelhas na busca por alimentos. No seu comportamento real, o principal objetivo das abelhas é aumentar o estoque de alimentos na colmeia, por isso as abelhas estão sempre em busca de fontes de alimentos para serem exploradas. Nesse contexto, existem três possibilidades de ações para as abelhas: (i) buscar novas fontes de alimento; (ii) explorar fontes já conhecidas; e, (iii) abandonar fontes

de alimentação esgotadas. Como consequência das atividades, existem três tipos de abelhas: operárias, observadoras e exploradoras.

No algoritmo as abelhas operárias têm as coordenadas de uma fonte de alimento, ou seja, cada operária é responsável por uma solução. As operárias por sua vez compartilham suas informações com as abelhas observadoras, que tem por objetivo buscar novas fontes de alimento em regiões próximas às fontes. As abelhas cuja fonte de alimento já se esgotou são transformadas em exploradoras e iniciam sua busca por novas fontes de alimento de forma aleatória (D.KARABOGA; BASTURK, 2008). Em termos computacionais, uma fonte de alimento representa uma solução possível para o problema, sendo que a qualidade do néctar que ali se encontra corresponde à qualidade da solução, ou seja, corresponde ao seu *fitness* ou aptidão. O algoritmo ABC executa os passos apresentados no Algoritmo 2:

---

**Algoritmo 2** Artificial Bee Colony. Fonte (KARABOGA; BASTURK, 2007)

---

**Entrada:** Inicializar Parâmetros;

1: **Repita:**

2: Posicione a operária em uma fonte de alimento;

3: Posicione as observadoras em uma fonte de alimento;

4: Envie as exploradoras na busca por novas fontes;

5: Atualizar a melhor fonte de comida encontrada até o momento;

6: **Até:** alcançar o critério de parada.

**Saída:** Colônia Atualizada

---

Em cada ciclo ou iteração, a busca consiste em três passos: enviar a operária a uma fonte de alimento e medir a qualidade do néctar; selecionar quais fontes serão utilizadas pelas observadoras e determinar a quantidade de néctar; determinar quais abelhas serão transformadas em exploradoras e enviá-las para novas possíveis fontes. Quando o algoritmo inicia, determina-se para as operárias um conjunto aleatório de fontes de alimento e quanto néctar cada um possui. Esse processo equivale a enviar as operárias para a fonte de alimento, que quando retornam compartilham suas informações com as observadoras. As operárias retornam para a fonte de alimento conhecida e visitam novas fontes de alimento tomando como base sua informação visual, ou seja, na vizinhança da solução. As observadoras irão escolher a sua região

com base na qualidade do néctar compartilhado pelas operárias, isto é, quanto maior a quantidade de néctar, maior será a possibilidade da abelha observadora escolher essa fonte. Chegando a fonte estas também escolhem novas fontes de alimentação com base em sua vizinhança. Quando o néctar de uma fonte de alimento é abandonado, uma abelha exploradora escolhe uma nova fonte de alimento de forma aleatória. No modelo proposto por Karaboga e Basturk (2007) e D.Karaboga e Basturk (2008), no máximo uma abelha exploradora é enviada por ciclo. Além disso, a quantidade de abelhas operárias e de observadores é o mesmo.

Com relação ao alcance visual das abelhas, uma solução é originalmente alterada utilizando-se a Equação 2.6, na qual  $k$  é um número aleatório entre 1 e a quantidade de operárias,  $j$  é um número aleatório entre 1 e a dimensão do problema, sendo  $j$  necessariamente diferente de  $i$ , e  $\phi_{ij}$  é um número aleatório no intervalo  $[-1, 1]$ .

$$v_{ij} = x_{ij} + \phi_{ij}(x_{ij} - x_{kj}) \quad (2.6)$$

Os estudiosos Zhu e Kwong (2010), inspirados pelo PSO, proporam uma melhoria como mostrado na Equação 2.7, na qual o novo termo é chamado de  $gbest$ ,  $y_i$  é a melhor solução do enxame e  $\varphi$  é um número aleatório no domínio  $[0, C]$ , sendo  $C$  uma constante não negativa.

$$v_{ij} = x_{ij} + \phi_{ij}(x_{ij} - x_{kj}) + \varphi_{ij}(y_i - x_{ij}) \quad (2.7)$$

Independentemente da equação sendo utilizada, se a qualidade do novo néctar é melhor que o anterior, então a fonte anterior é abandonada.

As abelhas observadoras escolhem quais fontes visitar por meio da probabilidade fornecida pela Equação 2.8, na qual  $f$  representa o *fitness* de cada abelha e  $S$  é a quantidade de fontes de alimento (que é igual a quantidade de abelhas operárias). Após escolhida a fonte de alimento, a abelha observadora produz uma modificação na solução, e se a qualidade do néctar da nova solução for melhor, a observadora abandona a fonte anterior.

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{n=1}^S f_n} \quad (2.8)$$

Quando uma modificação é feita, seja por uma operária ou uma observadora, se  $v_{ij}$  ultrapassar o limite superior ou inferior da respectiva dimensão, este pode ser redefinido com o valor mínimo ou máximo, dependendo do limite que foi ultrapassado.

Outro ponto a ser observado no algoritmo ABC é que qualquer fonte de alimentação que não for melhorada, isto é, que não receber melhoras em uma determinada quantidade de ciclos, deve ser imediatamente abandonada. A melhora na qualidade do néctar é considerada positiva se o *fitness* da nova solução for melhor ou igual ao anterior, assim permite-se que novas soluções sejam exploradas mesmo tendo a mesma qualidade de néctar da anterior.

### 2.2.2.3 Evolução Diferencial

O DE é um algoritmo evolutivo criado por [Storn e Price \(1995\)](#). Seu funcionamento é muito semelhante ao de um algoritmo genético (GA) ([MICHALEWICZ, 1996](#)), porém enquanto os GA's executam cruzamento e mutação, na DE executam-se os operadores na ordem inversa, isto é, primeiro a mutação e depois o cruzamento. A seguir apresenta-se os passos executados pelo Algoritmo 3:

---

**Algoritmo 3** Evolução Diferencial. Fonte ([STORN; PRICE, 1995](#))

---

**Entrada:** Inicializar Parâmetros;

1: **Para**  $i$  de 1 até o tamanho da população **Faça:**

2: Criar vetor de diferenças;

3: Formar novo indivíduo;

4: **Se**  $fit(novo) < fit(individuo_i)$  **Então:**

5: Substituir novo no gene do indivíduo alvo;

6: **Senão:**

7: Manter gene do indivíduo alvo;

8: **Fim Se**

9: **Fim Para**

**Saída:** População Evoluída

---

Assim como no PSO, na DE a população é inicializada de forma aleatória dentro do domínio de cada gene e seu *fitness* é avaliado. Ao entrar no laço cria-se o vetor de diferenças ( $v$ ) de acordo com a Equação 2.9, na qual  $x_\alpha$ ,  $x_\beta$  e  $x_\gamma$  são três indivíduos escolhidos aleatoriamente, com  $\alpha \neq \beta \neq \gamma$  dentro da população e ( $F$ ) é um fator de

mutação. Como os três indivíduos são escolhidos aleatoriamente, essa estratégia é chamada de *DE/Rand/Bin*. Quando  $x_\alpha$  é substituído pelo melhor indivíduo da população, a estratégia passa a ser chamada de *DE/Best/Bin*.

$$v = x_\alpha + F(x_\beta - x_\gamma) \quad (2.9)$$

Após gerar o vetor de diferenças, o novo indivíduo será criado de forma aleatória da seguinte maneira: para cada gene do indivíduo sorteia-se um valor  $r_i$  no intervalo  $[0, 1]$ , sendo que  $i$  corresponde à dimensão do problema. Se  $r_i < CR$ , ou seja, se o número sorteado for menor que a taxa de cruzamento (*Crossover Rate* -  $CR$ ) então o gene do novo indivíduo será originário de  $v$ , caso contrário, o gene virá do indivíduo alvo  $i$ . Essa operação é semelhante ao cruzamento discreto dos GA's e pode ser representado como mostrado na Equação 2.10.

$$\text{novo}_i = \begin{cases} v_i, & \text{se } r \leq CR \\ \text{pop}_i & \text{se } r > CR \end{cases} \quad (2.10)$$

Após o cruzamento verifica-se se o novo indivíduo apresenta um *fitness* melhor que indivíduo alvo, em caso afirmativo o novo indivíduo substitui o indivíduo alvo, caso contrário o alvo permanece na população.

A próxima seção apresenta mais detalhes sobre a teoria do problema de Seleção de Portfólios.

## 2.3 O Problema de Seleção de Portfólios

O modelo clássico de [Markowitz \(1952\)](#)<sup>1</sup> para o problema de seleção de portfólio assume que os investidores preferem maximizar o retorno dentro de um certo nível de risco ou minimizar o risco dentro de um certo nível de retorno. Este modelo é conhecido como modelo Média-Variância por utilizar estas estatísticas sobre o histórico dos preços normalizados para calcular, respectivamente, o retorno e o risco esperados para o portfólio ([QU et al., 2017](#)).

Para [Zin \(2016 apud MARKOWITZ, 1952\)](#), Markowitz criou a Moderna Teoria de Portfolio para construir portfólios financeiros de ativos com altas expectativas de retorno para determinado risco ou baixas possibilidades de risco para determinadas taxas de retorno.

Portanto, um portfólio financeiro otimizará dois objetivos conflitantes, ou seja, a maximização do retorno do portfólio esperado e a minimização da variância do retorno do portfólio ([YEVSEYEVA et al., 2014](#)). Formalmente é descrito como na Equação 2.11, onde  $N$  é o número de ativos no portfólio que representa a dimensionalidade do problema de otimização;  $w_i$  é o peso do  $i$ -ésimo ativo a ser otimizado;  $\sigma^2$  é o desvio do risco do portfólio enquanto  $\sigma_{ij}$  é a covariância entre o ativo  $i$  e o ativo  $j$ . Se  $i$  for igual a  $j$ ,  $\sigma_{ij}$  representa a variância de um particular ativo,  $r_p$  é a média de retorno do portfólio e  $r_i$  é a média de determinado ativo  $i$  ([QU et al., 2017](#)).

$$\begin{aligned} \text{Min } \sigma^2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} \\ \text{Max } r_p &= \sum_{i=1}^N w_i r_i \end{aligned} \quad (2.11)$$

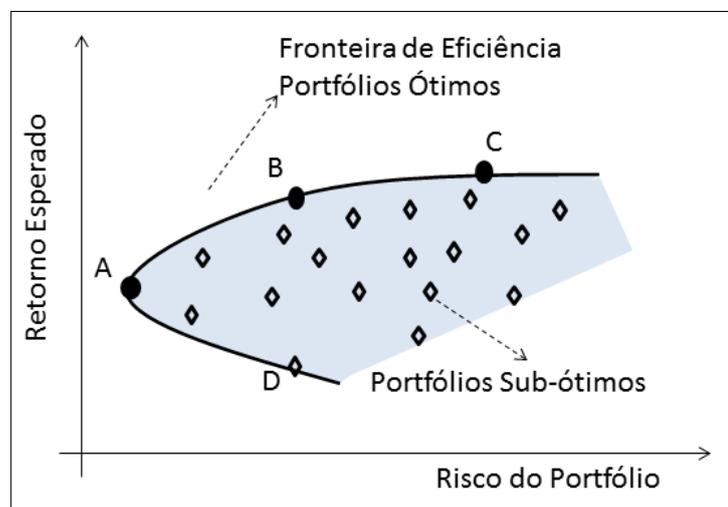
$$\text{Sujeito a } \sum_{i=1}^N w_i = 1, w_i \geq 0, i = 1, \dots, N$$

Para este problema, a restrição que deverá ser respeitada é a de que a somatória de todas as porcentagens aplicadas em cada ativo pertencente à carteira deve ser igual a 1 (um). A fronteira eficiente de [Markowitz \(1952\)](#) corresponde aos portfólios

<sup>1</sup> Markowitz foi reconhecido em 1990, com o Prêmio Nobel de Ciências Econômicas pela sua contribuição na teoria de seleção de portfólios. ([MARKOWITZ; SHARPE; MILLER, 1990](#))

que apresentam o maior retorno esperado para determinado nível de risco. A Figura 6 ilustra esta fronteira.

Figura 6 – Fronteira Eficiente de Markowitz



Fonte: Adaptado de [Arce \(2014\)](#).

Na Figura 6 os portfólios 'A', 'B' e 'C' são considerados eficientes. Já o portfólio 'D' é considerado ineficiente, pois outro portfólio apresenta o mesmo risco, mas com maior retorno. Para este exemplo, um investidor não deverá escolher a carteira 'D', pois existe uma segunda alternativa com uma relação risco-retorno mais atrativa, ou seja, para um mesmo nível de risco da carteira 'D' existe a carteira 'B' que apresenta o melhor retorno esperado. Resumindo, os investidores devem considerar que um dos princípios para avaliar um investimento é o tipo de risco associado e o retorno que podem oferecer.

Quanto maior for o risco do investimento, maior é o seu retorno. No entanto, não existem garantias absolutas de que um investimento de risco possa corresponder às expectativas do investidor, uma vez que o lucro poderá ser bastante inferior ao que seria esperado. Isso devido ao risco ser uma incerteza, por exemplo, se o investimento for aplicar em ações, o risco real está diretamente ligado a situações imprevisíveis tais como as especulações, as flutuações de mercado, os fatores políticos e os fatores econômicos. Como forma de prevenção, os melhores investimentos devem ser os diversificados; investir em vários tipos de ativos vai permitir diferentes tipos de retorno e diminuição do risco ([IQUIPAZA; AMARAL; BRESSAN, 2009](#)).

### 2.3.1 Análise de Risco X Retorno

Conceitualmente o risco de um investimento está diretamente relacionado com a probabilidade de se ganhar menos do que se esperava (REIS, 2019c). De acordo com Yevseyeva et al. (2014) o risco deve ser avaliado como a variância do retorno do portfólio e depende não só em como muitos ativos individuais variam o retorno, mas também como eles variam em relação uns aos outros. Para Costal e Meira (2017 apud MARKOWITZ, 1952), a variação dos ativos na carteira fará com que o retorno dessa carteira seja considerada como a média ponderada dos ativos da carteira.

Para Costal e Meira (2017 apud MARKOWITZ, 1952) o risco financeiro pode ser dividido em dois tipos, o risco diversificável e o risco não diversificável. O primeiro refere-se aos riscos que afetam um número pequeno de empresas, ou seja, se algo der errado apenas uma ou poucas empresas serão afetadas. O segundo tipo de risco, o não diversificável é o mais preocupante, pois refere-se a acontecimentos que afetam o mercado como um todo, como por exemplo problemas macroeconômicos, crises financeiras, desastres naturais, entre outros.

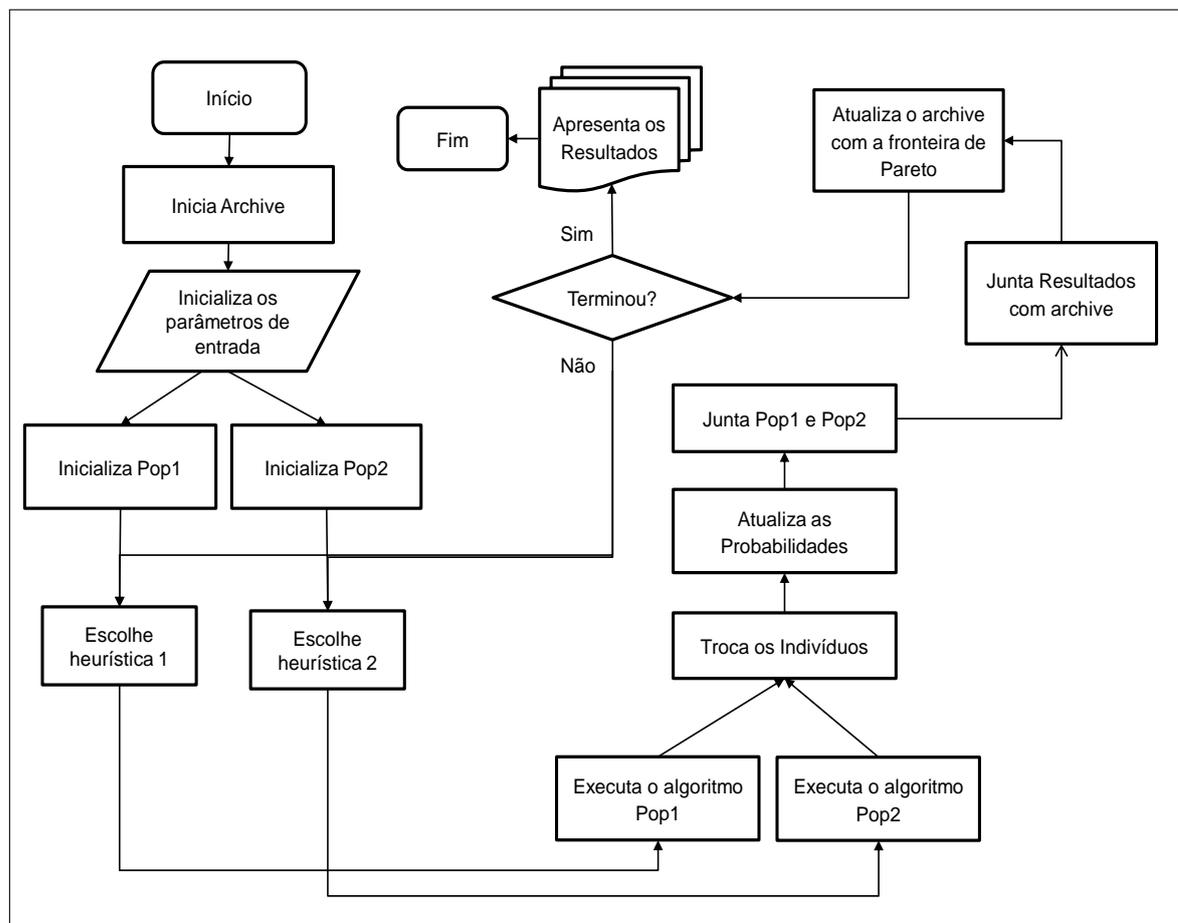
Markowitz definiu que os investidores podem formar sua fronteira eficiente (melhor conjunto possível de carteiras), ou seja, o investidor pode encontrar as carteiras que tem o menor nível de risco, isso porque a teoria de Markowitz preocupa-se com a variação dos ativos para a composição de uma carteira de investimento reduzindo o risco diversificado do portfólio (ZIN, 2016).

Na próxima seção é apresentado o modelo desenvolvido com suas especificações e os parâmetros utilizados.

### 3 Meta-Heurística Adaptativa Baseada em Vetor de Avaliações

O desenvolvimento deste modelo foi baseado em ideias de trabalhos anteriores, como relatado na seção 1.2 e principalmente nas bases do VEDE e do VEPSO. O fluxograma do modelo projetado definido para implementação é apresentado na Figura 7. Este modelo é generalizado e deve ser robusto o suficiente para conseguir resolver diversos problemas multiobjetivos. Este modelo foi denominado AVEMH.

Figura 7 – Fluxograma AVEMH



Fonte: Dados gerados neste trabalho

Para a utilização do modelo AVEMH deve-se inicializar o *archive* e os parâmetros de entrada. A inicialização do *archive* consiste na criação de um arquivo vazio que

será utilizado para armazenar as soluções desejadas; já os parâmetros de entrada consistem em:

- Inicializar o tamanho da população, o tamanho do indivíduo, o número de interações e a quantidade de gerações. O número de interações diz respeito à quantidade de vezes em que uma das três meta-heurísticas, PSO, ABC E DE será executada. Uma geração diz respeito à um loop do AVEMH apresentado no fluxograma antes de a quantidade de gerações ser atingida;
- Inicializar o espaço de busca definido pelo problema específico;
- Utilizar a definição das funções de avaliação, ditas  $f_1$  e  $f_2$ ;
- Inicializar as duas populações denominadas neste trabalho por *Pop1* e *Pop2*, especificando quais as funções de avaliação serão trabalhadas por cada população;
- Definir um problema para ser resolvido. No caso de problemas da Seleção de Portfólio também informar o local onde se encontra o conjunto de dados que será analisado;
- E por fim, inicializar os parâmetros individuais das heurísticas utilizadas, ou seja, VEPSO, VEABC, VEDE. Para o PSO são definidos a inercia e  $c_1$ ,  $c_2$  que são os coeficientes de aceleração; para o VEABC é definida a quantidade de sobreviventes; e para a DE são definidos o fator de mutação e a taxa de crossover.

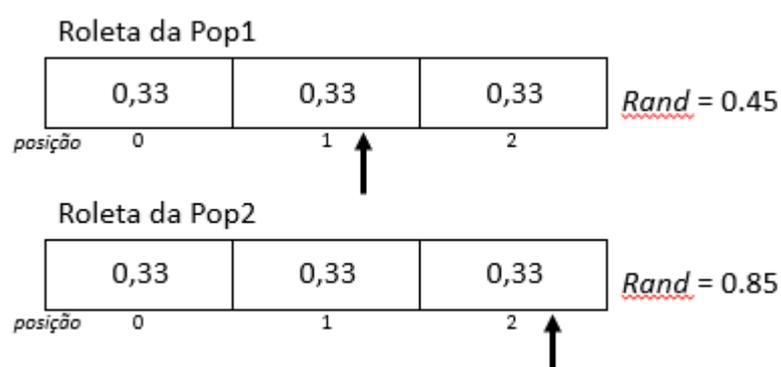
Após a descrição da fase de inicialização é descrita a fase de execução do modelo AVEMH. Esta fase de execução compreende: (a) a escolha das heurísticas; (b) o 'núcleo' do AVEMH; (c) a verificação de melhora nas populações *Pop1* e *Pop2*; (d) a atualização das probabilidades; (e) a união das duas populações; (f) e a verificação das melhores soluções.

## A escolha das heurísticas

O AVEMH define as chances de cada heurística ser escolhida de forma uniforme. Tem-se 3 (três) heurísticas, ditas: VEPSO, VEABC e VEDE, então a fração que corresponde a uma divisão exata da probabilidade é dada por  $1/3$ . Em percentual este valor é de 33.33% para cada heurística. Para a manutenção da probabilidade de escolha de cada heurística o AVEMH utiliza 2 (duas) roletas e a geração de um valor aleatório para verificação dos limites em cada roleta. Cada heurística foi mapeada para uma posição da roleta, isto é a posição 0 (zero) corresponde ao PSO, a posição 1 (um) corresponde ao ABC e a posição 3 (três) ao DE.

Sendo assim, uma das situações a seguir é verificada e o algoritmo escolhido: (a) caso o valor aleatório seja menor que a posição 0 (zero) da roleta o algoritmo escolhido será PSO; (b) caso o valor aleatório seja maior ou igual à posição 0 (zero) e menor que a soma das posições 0 (zero) e 1 (um) da roleta o algoritmo escolhido será ABC; (c) caso o valor aleatório seja maior ou igual à soma das posições 0 (zero) e 1 (um) da roleta o algoritmo escolhido será DE. A Figura 8 apresenta uma ilustração desta configuração mantida pelo AVEMH em um exemplo em que a disposição das duas roletas é a inicial.

Figura 8 – Ilustração das roletas do AVEMH



Fonte: Dados gerados neste trabalho

Neste exemplo o número aleatório escolhido para a Pop1 foi 0.45, isto implica na comparação de 0.45 com as situações (a), (b) e (c) descritas acima. Desta forma, 0.45 atende à situação (b) pois está entre 0.33 e 0.66 sendo escolhida a posição 2(dois) da

roleta que corresponde ao algoritmo ABC. Já para a Pop2 o valor escolhido foi de 0.85 e este valor atende a situação (c), sendo escolhido a DE para execução da Pop2. O código desenvolvido para a escolha da heurística a ser executada é apresentado no apêndice A.1.

A heurística escolhida executará sempre utilizando o melhor indivíduo migrado recebido da outra população. Para uniformizar a nomenclatura, neste trabalho o melhor indivíduo será sempre chamado de *pBest*. No VEPSO o indivíduo migrado é o *gBest*. Na VEDE o indivíduo migrado é o que apresenta melhor *fitness* na população. Já no VEABC será migrada a localização do melhor néctar.

## Núcleo do AVEMH

A partir da heurística escolhida deve-se atualizar todos os indivíduos pertencentes à população. Neste trabalho, são utilizadas duas formas de atualizar os indivíduos. Na primeira, aplica-se a atualização sobre todos os genes de cada indivíduo. E na segunda forma define-se a quantidade de genes a partir da Equação 3.1 (relatada também na seção 1.2), escolhendo-se aleatoriamente para cada indivíduo quais os genes que serão atualizados. Posteriormente uma normalização é aplicada sobre os indivíduos.

$$e = 2w * \sqrt{n} \quad (3.1)$$

Esta segunda forma foi aplicada ao problema da Seleção de Portfólio e a normalização garante a atualização dos demais genes e o respeito à restrição definida por este problema especificamente. A escolha desta segunda opção também está relacionada ao menor tempo de execução do AVEMH. A normalização dos indivíduos é definida a partir da Equação 3.2.

$$\frac{x_i}{\sum_{n=1}^S x_n} \quad (3.2)$$

Sendo assim, dado um indivíduo  $i$ : {3.13;1.5;4.02;8.09;8.34;5.04;2.0;5.59;4.64;8.76;1.35;9.98;3.57;3.69;7.07;2.02;9.82;6.97;3.75;2.78;1.65;8.83;7.63;2.61;5.12;7.13;

4.15;6.3;2.48;7.22;8.29} com todos os genes gerados a partir da definição do espaço de busca. A forma deste mesmo indivíduo normalizado é  $i_{norm}: \{0.03;0.05;0.03;0.05;0.05;0.05;0.02;0.01;0.04;0.05;0.01;0.04;0.05;0.01;0.02;0.02;0.05;0.03;0.03;0.01;0.03;0.05;0.02;0.01;0.05;0.02;0.03;0.03;0.02;0.05;0.04\}\{1\}$ .

A soma de todos os genes de um indivíduo normalizado deve ser igual a 1 (um). O último valor apresentado no  $i_{norm}$  representa esta soma.

O apêndice A.2 apresenta a codificação principal do AVMH onde estão os passos executados pela Pop1 e pela Pop2. Sendo assim, caso o VEPSO seja escolhido para atualização da população utiliza-se as Equações 2.4 e a 2.5 para a alteração dos genes de cada indivíduo. Caso seja o VEABC a atualização da população é feita a partir da Equação 2.7. E caso seja a DE, a evolução da população é feita em duas etapas: (a) a primeira realiza a operação de mutação, segundo a Equação 2.9; a estratégia de mutação utilizada neste trabalho é a *DE/Best/1* em que o indivíduo  $x_\alpha$  é substituído pelo melhor indivíduo da população; (b) a segunda etapa realiza a operação de crossover com o auxílio de um número aleatório segundo a Equação 2.10.

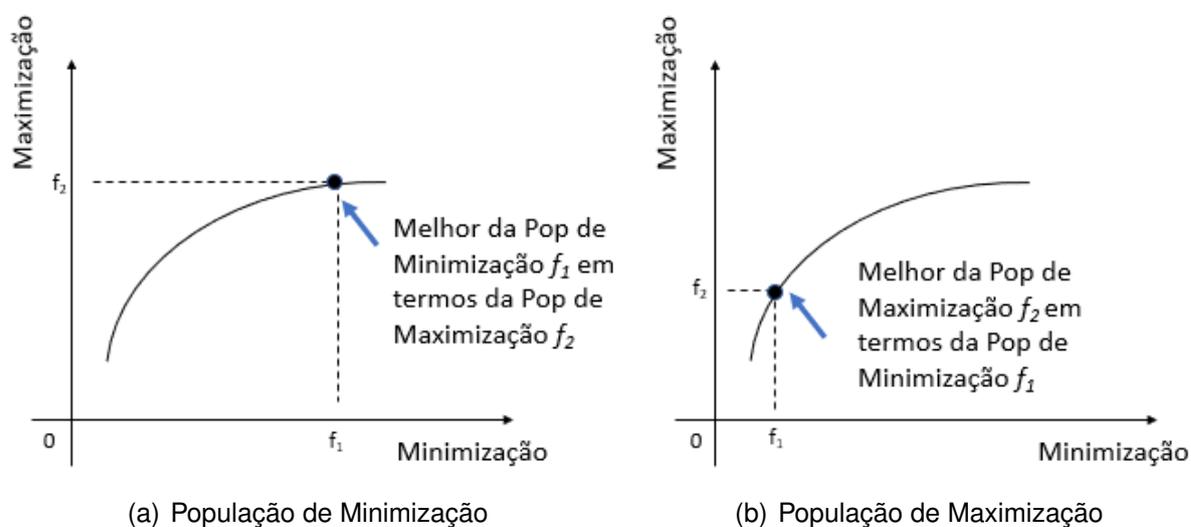
Nas linhas 07, 14 e 21 do apêndice A.2 é realizado o cálculo do melhor indivíduo para a heurística que foi executada. O cálculo deste melhor indivíduo é feito através da ordenação dos indivíduos da população a partir da qualidade desejada. O melhor indivíduo deve ser analisado graficamente em termos da outra população. A Figura 9 apresenta esta disposição.

Dessa forma, em uma população de minimização o melhor indivíduo será o de maior qualidade e para a população de maximização o melhor indivíduo será o de menor qualidade.

## Verificação da melhora da população

Após a execução da heurística escolhida a população é avaliada para verificar se a população melhorou. A avaliação da população pode ser feita com duas abordagens. A primeira considera que se o melhor indivíduo veio da outra população então assumi-se

Figura 9 – Análise gráfica sobre o melhor indivíduo da Pop1 para a Pop2 e vice-versa



Fonte: Dados gerados neste trabalho

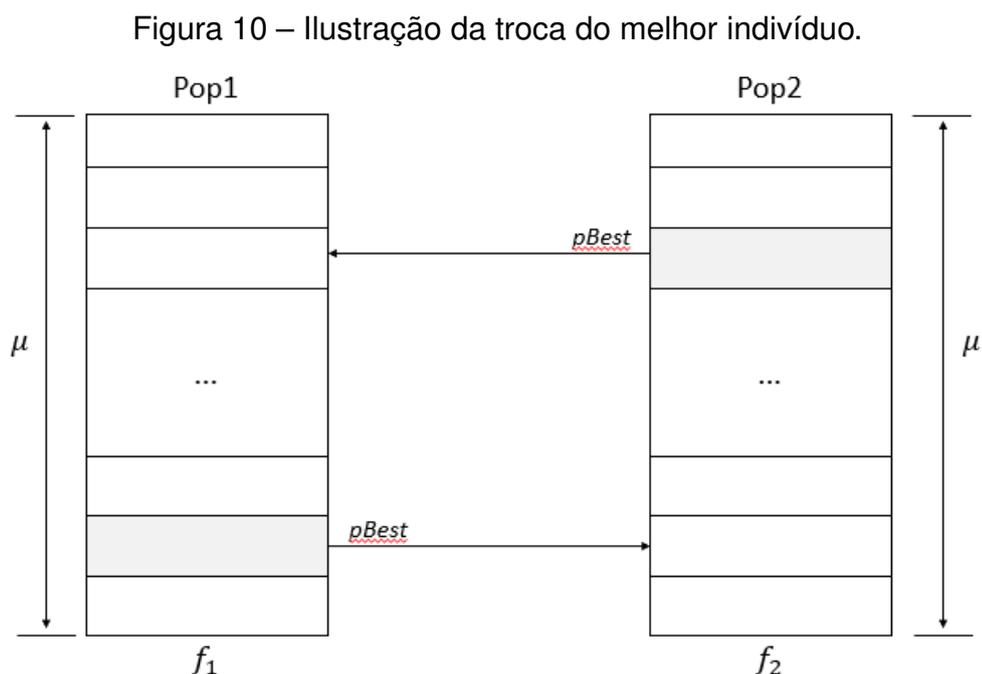
que houve uma melhora no ótimo da função. A outra abordagem utiliza a média da qualidade dos indivíduos da população, caso esta tenha melhorado com relação à média anterior, entende-se que houve uma melhora na população. O apêndice A.3 apresenta a avaliação realizada sobre a população para decidir se a heurística que enviou o melhor indivíduo candidato será recompensada ou se será penalizada.

O apêndice A.4 apresenta o código da ‘Avaliação da população pelo Melhor Indivíduo’; já a ‘Avaliação da população pela Média’ foi explicada apenas de forma teórica.

- Na avaliação pelo Melhor Indivíduo:** considerando-se o apêndice A.4 é possível observar que na linha 12 (doze) é calculada a qualidade do indivíduo migrado  $i$  para a população  $pop$  em que este indivíduo chega; na linha 13 (treze) verifica-se qual o tipo de problema é tratado pela população, se maximização ou minimização; e na linha 14 ou 18 faz-se um comparativo entre o indivíduo migrado  $i$  e o indivíduo já consolidado como o “melhor” desta população  $i_$ . Caso o indivíduo migrado  $i$  seja melhor, um valor verdadeiro é retornado.
- Na avaliação pela Média:** neste caso, calcula-se a média dos indivíduos sobre determinada qualidade trabalhada pela população, por exemplo, caso a subpopulação1 seja de minimização o que se deseja encontrar é uma menor média entre

a população corrente e a população atualizada; caso seja de maximização o que se deseja encontrar é uma maior média.

Caso a população tenha melhorado realiza-se o envio do melhor individuo da *Pop1* para a *Pop2* e vice-versa. A Figura 10 ilustra a troca dos melhores indivíduos entre as duas populações.



Fonte: Dados gerados neste trabalho

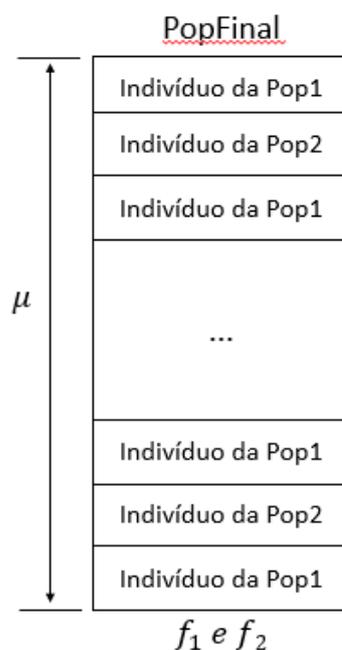
## Atualização das probabilidades

Se houve melhora a heurística que enviou seu melhor indivíduo tem sua probabilidade aumentada, caso contrário, é diminuída. Nesse momento podem acontecer dois casos: (i): se houve uma melhora, a probabilidade da heurística que enviou o indivíduo é incrementada em 0.01, enquanto que as demais são diminuídas em 0.005; e (ii): se não houve melhora, a heurística que enviou o indivíduo tem sua probabilidade decrementada em 0.01 e as demais tem sua probabilidade aumentada em 0.005.

## União das duas populações

Após as etapas anteriores junta-se as duas populações em apenas uma, denominada *PopFinal* e calcula-se a função  $f_1$  para os indivíduos da subpopulação2 e a função  $f_2$  para os indivíduos da subpopulação1. A Figura 11 ilustra a *PopFinal* gerada no término de cada geração do AVMH.

Figura 11 – População gerada pelos melhores indivíduos vindo de Pop1 e Pop2.



Fonte: Dados gerados neste trabalho

Todos os melhores indivíduos atingidos em cada geração do AVMH foram guardados nesta população. Quando o número de gerações for atingido será necessário verificar quais dos indivíduos da *PopFinal* são não dominados, como explicado na próxima seção.

## Verificação das melhores soluções

Ao ser atingido o número de gerações, as subpopulações finais são unidas ao *archive* e a fronteira de Pareto é atualizada. Essa fronteira é enviada para o *archive* e as soluções dominadas são removidas e as não dominadas são mantidas. Por fim, calcula-se o hipervolume para os indivíduos pertencentes ao *archive*.

## 4 Resultados Obtidos

Aqui são apresentados os resultados atingidos para o conjunto de problemas Zdt's e o problema da Seleção de Portfólios com o intuito de verificar a qualidade da meta-heurística desenvolvida.

Para a utilização do AVMH na resolução de problema, basta a escolha dos parâmetros: problema a ser otimizado, quantidade de execuções, quantidade de gerações a serem avaliadas, tamanho da população e a definição do(s) espaço(s) de busca.

Todos os testes foram realizados em um computador com processador Intel(R) Core(TM) i5 com 2.50GHz, 8,00 GB de RAM e com sistema operacional Windows 8.1. de 64 bits. A natureza das configurações utilizadas no AVMH é apresentada na tabela 6 onde são mostrados os parâmetros cujos valores são orientados pela literatura e/ou são definidos pelo projetista.

Tabela 6 – Natureza dos Parâmetros utilizados na Pesquisa

Parâmetros	Projetista		Literatura	
	Intervalo	Valor Específico	Intervalo	Valor Específico
w			X	X
c1; c2				X
Sobreviventes				X
Fator de mutação			X	X
Taxa de crossover			X	X
Tamanho da População		X		X
Tamanho de Indivíduos				X
Espaço de Busca			X	
Número de Interações		X		
Número de Execuções		X		
Número de Gerações		X		

Fonte: Dados gerados neste trabalho

Para a modelagem do problema das Zdt's considera-se os indivíduos como possíveis soluções em que se deseja atingir o objetivo da minimização. O espaço de busca ou domínio de cada problema é o que foi definido na Tabela 3 de forma individual.

Para as resoluções destes problemas foram utilizadas 100 gerações. Em cada geração é mantida duas populações com 100 indivíduos cada uma.

Para a modelagem do problema da Seleção de Portfólios considera-se os indivíduos como as carteiras de investimento que se deseja otimizar, maximizando o retorno e minimizando o risco; os genes de cada indivíduo como sendo as porcentagens que se deve investir em cada ativo; e a somatória dos genes igual a 1 (um). A menor porcentagem que um ativo pertencente à carteira pode assumir é de 0,01 (representando um por cento, sempre considerando até duas casas decimais) enquanto que a máxima porcentagem pode ser 1 (representando cem por cento). Isso significa que para um gene existem 100 possibilidades de escolha. Tomando-se como exemplo um portfólio com dois ativos temos  $100 * 100 = 10.000$  possibilidades de formação de carteiras. Dessa forma, a inserção de um ativo aumenta exponencialmente a complexidade deste problema na ordem de  $10^{2x} \simeq 10^2$ , onde x é a quantidade de ativos que se pretende analisar. Nos experimentos da Seleção de Portfólio foram executados cada conjunto de dados por 2000 gerações.

Para a realização dos experimentos utilizou-se os parâmetros como definidos em (CLERC, 2012), (CORTES; RAU-CHAPLIN, 2015). A Tabela 7 apresenta essas configurações.

Tabela 7 – Parâmetros Utilizados

Metaheurística	Parâmetro	Valor
VEPSO	inercia (w)	$1/(1/2 + \ln(2))$
	$c1 = c2$	$1/2 + \ln(2)$
VEABC	sobrevive	90%
VEDE	taxa de crossover	0.9
	taxa de mutação	0.7

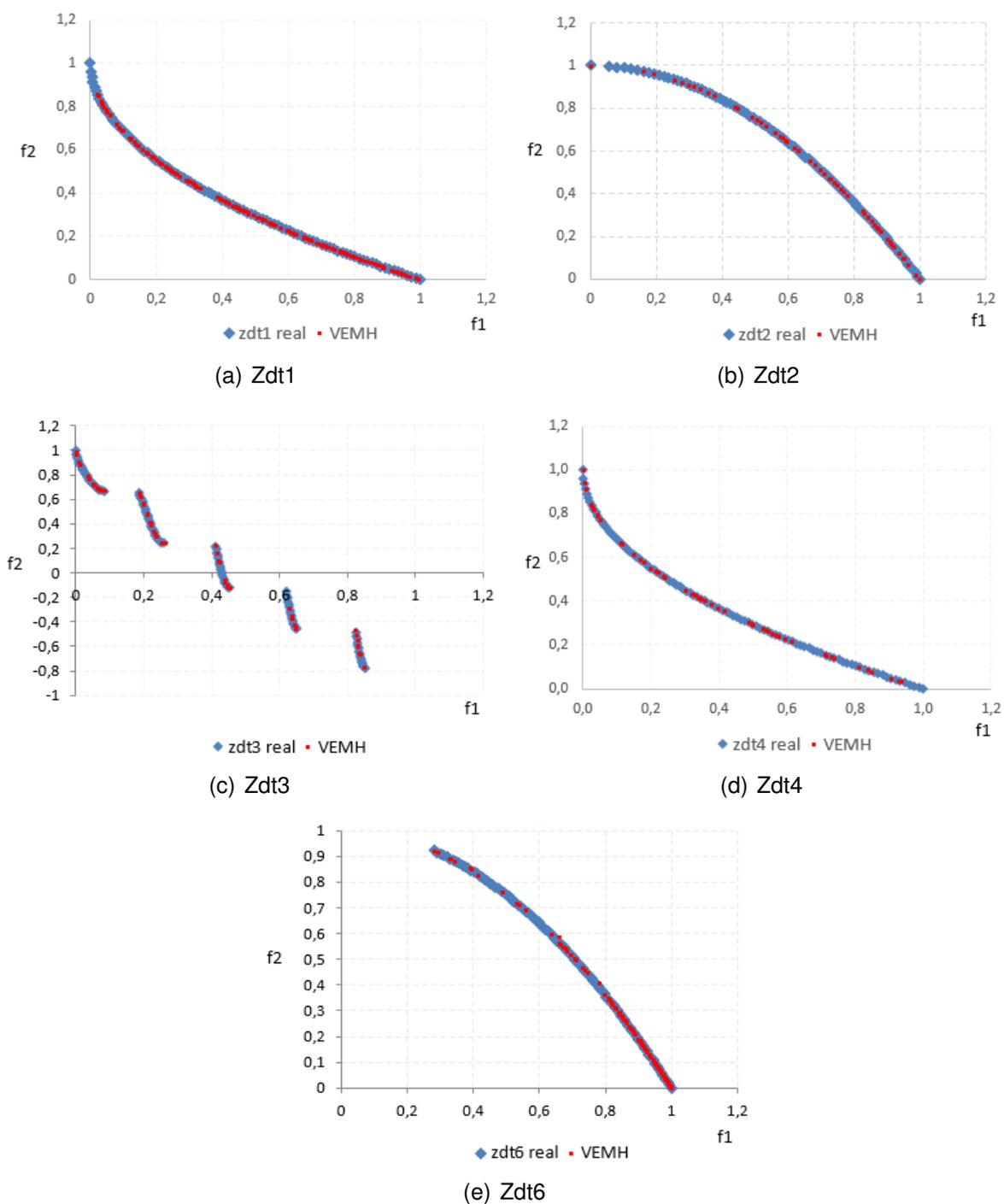
Fonte: Valores observados de (CLERC, 2012) e em (CORTES; RAU-CHAPLIN, 2015)

A avaliação dos resultados é feita sobre 31 execuções para que sua distribuição seja considerada normal de acordo com o teorema do limite central, sendo possível assim a utilização de testes paramétricos na comparação dos resultados.

## Resultados Funções de Teste Zdt's - *Benchmark*

A Figura 12 apresenta a comparação entre a fronteira de Pareto ótima e os testes realizados com as funções de *benchmark* ZDT's.

Figura 12 – Comparativo da fronteira real das funções de *benchmark* com as fronteiras encontradas pelo AVEMH para as Zdt's.



Fonte: Dados gerados neste trabalho

Na Tabela 8 estão os valores calculados referentes ao melhor hipervolume, a média dos hipervolumes, a variância e o desvio padrão para as Zdt's. Na Tabela 9 é apresentada a quantidade de soluções encontradas pelo AVEMH em relação aos melhores hipervolumes encontrados para as Zdt's.

Tabela 8 – Resultados Calculados pelo AVEMH para as Zdt's

Função	Real Hv	Melhor Hv	Média Hv	Variância	D. Padrão
ZDT1	120.6621	120.6616	120.5367	0,000238	0.015440
ZDT2	120.3288	120.3245	120.2548	0,000138	0.011745
ZDT3	128.7781	128.7714	128.7714	3E-26	1E-13
ZDT4	120.6661	120.6621	120.6504	2E-26	1E-13
ZDT6	117.5149	117.4579	114.4111	0.27E+3	16.4851

Fonte: Dados gerados neste trabalho

Tabela 9 – Quantidades de soluções não dominadas atingidas pelo AVEMH para as Zdt's.

	Zdt1	Zdt2	Zdt3	Zdt4	Zdt6
Nº de gerações	100	100	100	100	100
Tamanho do indivíduo	30	30	30	10	10
Nº de soluções atingidas	200	73	33	59	10
Hiper volume - Melhor	120,6616	120,3245	128,7714	120,6621	117,4579
Hiper volume - Médio	120,6615	120,3230	128,7258	120,5771	117,1978

Fonte: Dados gerados neste trabalho

Para verificar a melhor qualidade do AVEMH em relação aos algoritmos VE sem adaptação, faz-se um comparativo entre os hipervolumes atingidos, como mostra a Tabela 10 para as zdt's.

Tabela 10 – Comparativos dos melhores resultados atingidos pelo AVEMH em relação aos melhores resultados atingidos com VEPSO, VEABC e VEDE, para as funções de testes Zdt's.

Função	AVEMH Hv	VEPSO Hv	VEDE Hv	VEABC Hv
ZDT1	<b>120.6616</b>	120.6547	120.6161	120.6562
ZDT2	<b>120.3245</b>	120.3174	120.2431	120.3244
ZDT3	<b>128.7714</b>	128.5893	128.6462	128.6250
ZDT4	120.6621	120.6633	120.6607	<b>120.6645</b>
ZDT6	117.4579	117.2347	<b>117.5116</b>	117.1973

Fonte: Dados gerados neste trabalho

O AVEMH alcança melhores resultados nas ZDT1, ZDT2 e ZDT3. O VEABC encontra o melhor hiper volume na ZDT4 e o VEDE o melhor resultado na ZDT5, muito embora todos os valores sejam muito parecidos. Com intuito de verificar se realmente existem diferenças significativas entre os resultados apresentados pelo AVEMH, VEPSO, VEABC e VEDE foi realizada uma análise de variância (ANOVA) sobre os dados obtidos nos hiper volumes com significância de 95 % ( $\alpha = 0,05$ ) e um teste de Tukey apresentados nas Tabelas 11 e 12. Como se pode observar, o teste ANOVA indica que há diferenças significativas em todas as funções ZDTs.

Tabela 11 – Teste ANOVA comparando o AVEMH com as demais meta-heurísticas nas funções ZDT

F crítico = 2,73				
Função F	Função F	Função F	Função F	Função F
ZDT1 11,78	ZDT2 653,6	ZDT3 3888	ZDT4 10,4	ZDT6 100,1

Fonte: Dados gerados neste trabalho

O teste de Tukey na Tabela 12 indica que o AVEMH e VEABC obtiveram o melhor desempenho na ZDT1 já que a diferença não é significativa. Nas ZDT2 e ZDT3, o AVEMH obteve realmente os melhores resultados. O algoritmo VEABC juntamente com o VEPSO obtiveram o melhor resultado na ZDT4. E na ZDT6, o algoritmo VEDE realmente obteve os melhores resultados.

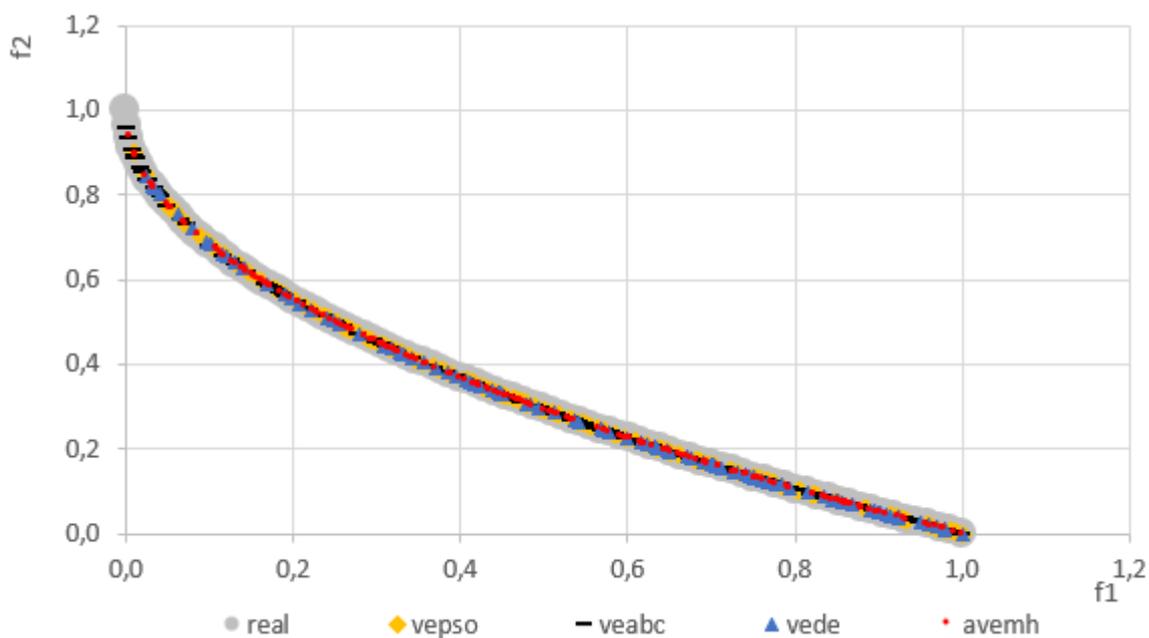
Também é apresentado graficamente um comparativo entre o AVEMH e as heurísticas estáticas mostrado nas figuras 13, 14, 15, 16 e 17 com intuito de visualizar a disposição dos indivíduos do AVEMH em relação à curva ótima esperada quando da resolução dos problemas Zdt's. Nestes problemas foram utilizadas 100 gerações.

Tabela 12 – Teste de Tukey comparando o AVMEMH com as demais meta-heurísticas nas funções ZDTs

Zdt1					
	p		p		p
AVEMH vs VEABC	0,998	AVEMH vs VEDE	0,0007	AVEMH vs VEPSO	0,00006
Zdt2					
	p		p		p
AVEMH vs VEABC	0,158	AVEMH vs VEDE	0,0000	AVEMH vs VEPSO	0,0000
Zdt3					
	p		p		p
AVEMH vs VEABC	0,0000	AVEMH vs VEDE	0,0000	AVEMH vs VEPSO	0,0000
Zdt4					
	p		p		p
AVEMH vs VEABC	0,0525	AVEMH vs VEDE	0,1738	AVEMH vs VEPSO	0,039
Zdt6					
	p		p		p
AVEMH vs VEABC	0,9986	AVEMH vs VEDE	0,0000	AVEMH vs VEPSO	0,0026

Fonte: Dados gerados neste trabalho

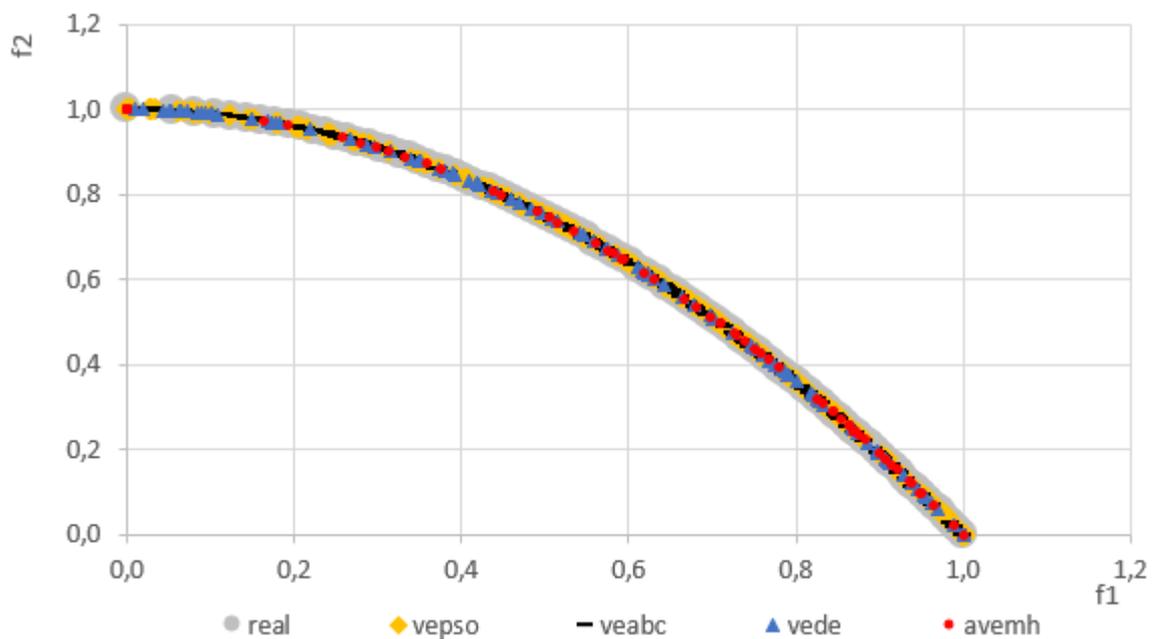
Figura 13 – Comparativo do AVMEMH em relação às heurísticas estáticas na resolução do problema Zdt1.



(a) Zdt1

Fonte: Dados gerados neste trabalho

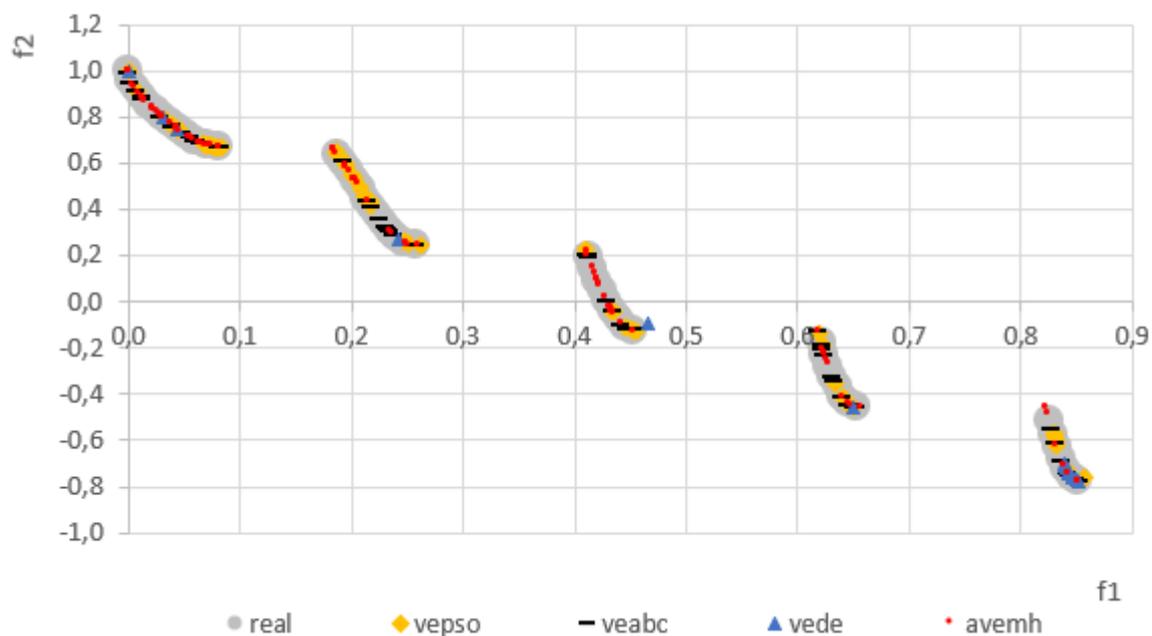
Figura 14 – Comparativo do AVMH em relação às heurísticas estáticas na resolução do problema Zdt2.



(a) Zdt2

Fonte: Dados gerados neste trabalho

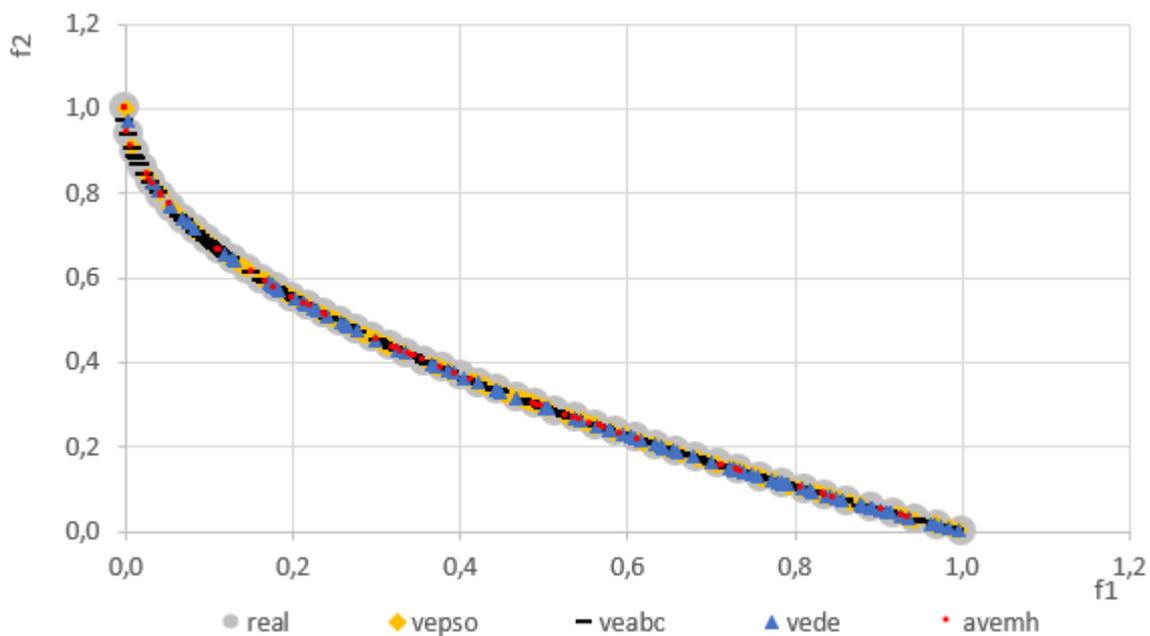
Figura 15 – Comparativo do AVMH em relação às heurísticas estáticas na resolução do problema Zdt3.



(a) Zdt3

Fonte: Dados gerados neste trabalho

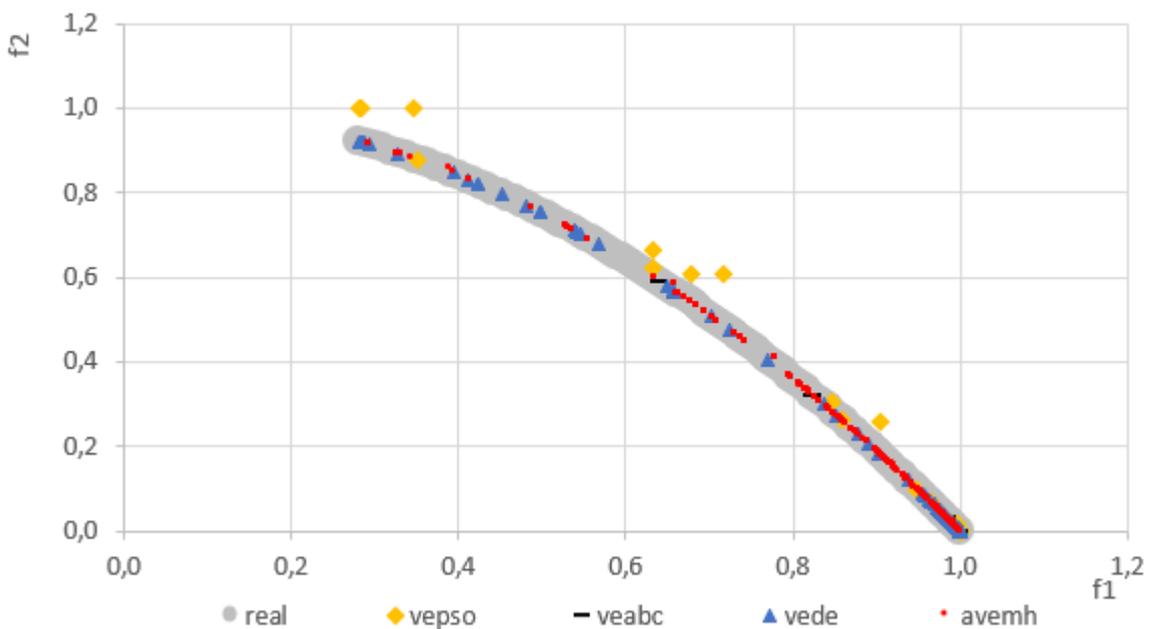
Figura 16 – Comparativo do AVEMH em relação às heurísticas estáticas na resolução do problema Zdt4.



(a) Zdt4

Fonte: Dados gerados neste trabalho

Figura 17 – Comparativo do AVEMH em relação às heurísticas estáticas na resolução do problema Zdt6.



(a) Zdt6

Fonte: Dados gerados neste trabalho

## Resultados para o Problema de Seleção de Portfólios

Para a resolução do problema da Seleção de Portfólios fez-se um comparativo dos resultados encontrados pelo AVMH com a fronteira eficiente real. A Figura 18 apresenta graficamente os melhores resultados atingidos pelo AVMH.

Na Tabela 13 estão disponíveis o número de gerações utilizadas, o número de ativos em cada problema, a quantidade de soluções encontradas e os hipervolumes calculados pelo AVMH, para os problemas da Seleção de Portfólios com 2000 gerações.

Na Tabela 14 estão disponíveis os resumos das médias dos melhores resultados atingidos pelo AVMH em relação aos resultados atingidos com o VEPSO, VEABC e VEDE, para os problemas da Seleção de Portfólios. Como se pode observar, o AVMH apresenta uma média melhor nos portfólios HST, DAX e FTSE, enquanto que o VEDE apresenta uma melhor média no S&P 100 e Nikkei 225.

Tabela 13 – Medidas calculadas pelo AVMH para os problemas de Seleção de Portfólios.

	HST	DAX	FTSE	S&P 100	Nikkei 225
Nº de gerações			2000		
Nº de ativos	31	85	89	98	225
Nº de soluções atingidas	65	58	36	180	30
Hiper volume - Melhor	120,9459	120,9724	120,9649	120,9650	120,9824
Hiper volume - Médio	120,8725	120,8901	120,9018	120,8815	120,8990

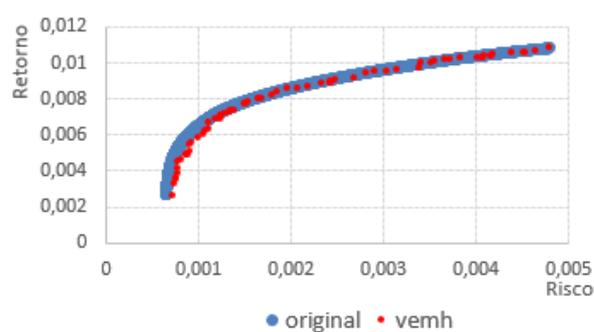
Fonte: Dados gerados neste trabalho

Tabela 14 – Comparativo dos melhores resultados atingidos pelo AVMH em relação aos resultados atingidos com VEPSO, VEABC e VEDE, para o problema de Seleção de Portfólio.

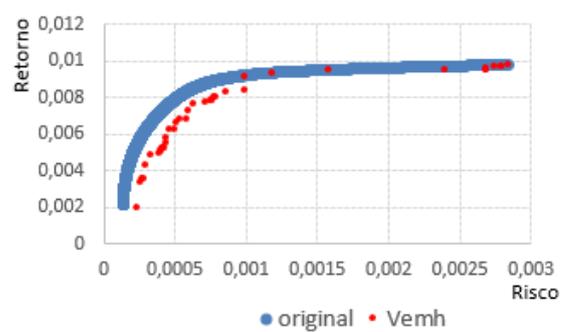
Função	Gerações	AVMH Hv	VEPSO Hv	VEABC	VEDE Hv
HST	2000	<b>120,8725</b>	120,8592	120,7398	120,8191
DAX	2000	<b>120,8901</b>	120,7752	120,8895	120,8898
FTSE	2000	<b>120,9018</b>	120,8869	120,8926	120,8979
S&P 100	2000	120,8815	120,8552	120,8620	<b>120,9067</b>
Nikkei 225	2000	120,8999	120,8666	120,8772	<b>120,9010</b>

Fonte: Dados gerados neste trabalho

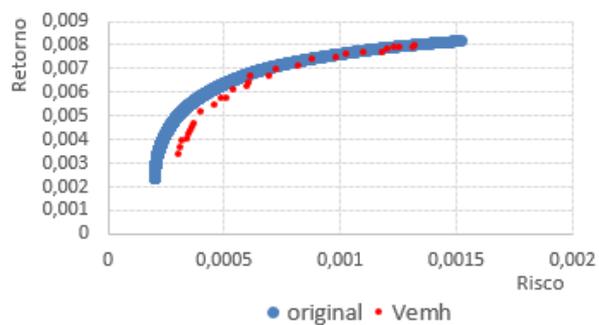
Figura 18 – Comparativo da fronteira real das funções de *benchmark* com as fronteiras encontradas pelo AVEMH para a Seleção de Portfólios.



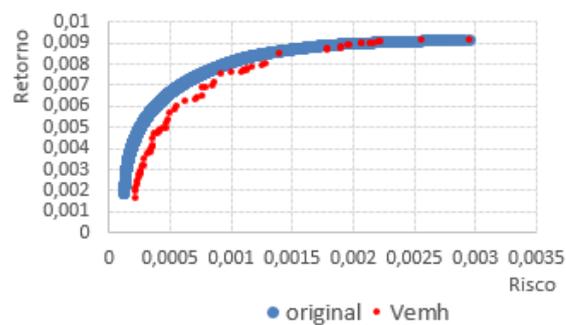
(a) Hong Kong Hang Seng



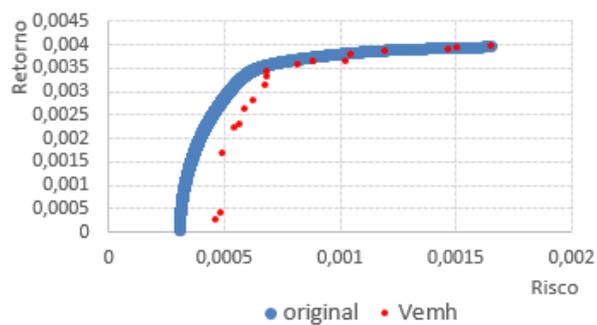
(b) German Dax 100



(c) British FTSE 100



(d) US S&P 100



(e) Japanese Nikkei

Fonte: Dados gerados neste trabalho

Com intuito de verificar se realmente existem diferenças significativas entre os resultados apresentados pelo AVEMH e as demais heurísticas foi realizada uma análise de variância (ANOVA) com grau de significância de 95% ( $\alpha = 0,05$ ) e F crítico igual a 2,73 conforme apresentado na Tabela 15.

Tabela 15 – Teste ANOVA comparando o AVEMH com as demais meta-heurísticas

F crítico = 2,73									
Portfólio	F	Portfólio	F	Portfólio	F	Portfólio	F	Portfólio	F
HST	5,596	DAX	5,603	FTSE	0,056	S&P 100	0,055	Nikkei	0,664

Fonte: Dados gerados neste trabalho

Como pode ser observado há diferenças significativas nos portfólios HST e DAX. Para identificar as diferenças fez-se um teste de Tukey conforme apresentado na Tabela 16, na qual pode-se notar que as maiores diferenças estão a favor do AVEMH e em contra ao VEDE e a VEABC, ou seja, a AVEMH apresenta melhores resultados que o VEDE e o VEABC. Além disso, não há diferenças significativas entre o AVEMH e o VEPSO.

Tabela 16 – Teste de Tukey comparando o AVEMH com as demais meta-heurísticas nos portfólios HST e DAX

HST					
	p		p		p
AVEMH vs VEABC	0,0017	AVEMH vs VEDE	0.4432	AVEMH vs VEPSO	0.9821
DAX					
	p		p		p
AVEMH vs VEABC	0,0017	AVEMH vs VEDE	0.4424	AVEMH vs VEPSO	0.9822

Fonte: Dados gerados neste trabalho

A Tabela 17 apresenta o tempo médio de cada execução para cada portfólio em minutos. Em média o AVEMH é o mais rápido que o VEABC na otimização do HST, S&P 100 e Nikkei 225. É mais rápido que o VEDE em todos os portfólios. Embora o VEPSO seja o mais rápido, não é o algoritmo que consegue alcançar as melhores configurações de portfólios como previamente apresentado.

A Tabela 18 apresenta a carteira eficiente calculada pelo AVEMH para o arquivo HST que contém 31 ativos sendo analisados. Quanto mais carteiras forem encontradas

Tabela 17 – Média do tempo de execução em minutos para a Seleção de Portfólios - 2000 gerações

	AVEMH		VEPSO		VEABC		VEDE	
Dados	Média	Desvio	Média	Desvio	Média	Desvio	Média	Desvio
HST	0,30	0,0086	0,18	0,0075	0,34	0,0098	0,38	0,0416
DAX	1,03	0,0088	0,54	0,0200	0,90	0,0118	1,05	0,027
FTSE	1,00	0,0066	0,57	0,0183	0,98	0,0128	1,12	0,0338
S&P 100	1,04	0,009	0,71	0,0085	1,14	0,0056	1,26	0,0295
Nikkei 225	3,25	0,0268	2,47	0,0115	3,48	0,0278	3,72	0,1415

Fonte: Dados gerados neste trabalho

melhor será a chance das soluções estarem mais diversificadas e espalhadas sobre a curva eficiente. Todas as carteiras ótimas devem somar 1. A soma corresponde à última informação em cada linha.

Tabela 18 – Carteiras eficientes para o 'Hong Kong Hang Seng' calculados pelo AVEMH

{0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0,01; 0,03; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0,01; 0; 0,01; 0; 0,91; 0; 0; 0} 1

{0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0,01; 0,01; 0,01; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0,09; 0; 0,83; 0; 0,02; 0} 1

{0,01; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,21; 0; 0,74; 0,01; 0; 0} 1

{0,01; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0,15; 0,01; 0,76; 0,01; 0,01; 0} 1

{0,01; 0; 0; 0,01; 0,04; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0,01; 0,06; 0,01; 0,81; 0,01; 0,01; 0} 1

{0,01; 0; 0,01; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,44; 0; 0,5; 0; 0; 0} 1

{0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0,01; 0; 0; 0,6; 0; 0,34; 0; 0,01; 0} 1

{0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0,01; 0; 0,93; 0; 0; 0,01; 0,01; 0} 1

{0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0,01; 0; 0; 0,93; 0; 0,01; 0; 0,01; 0} 1

{0,01; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0,94; 0; 0; 0; 0,01; 0} 1

{0,01; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0,92; 0; 0; 0,01; 0; 0} 1

{0,01; 0,01; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0,01; 0,01; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0,91; 0; 0; 0,01; 0; 0} 1

{0,01; 0,01; 0; 0; 0,01; 0; 0,01; 0; 0; 0,01; 0; 0,02; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0,88; 0; 0,01; 0,01; 0; 0} 1

Tabela 18 - Carteiras eficientes para o 'Hong Kong Hang Seng' calculados pelo AVEMH (Continuação)

---

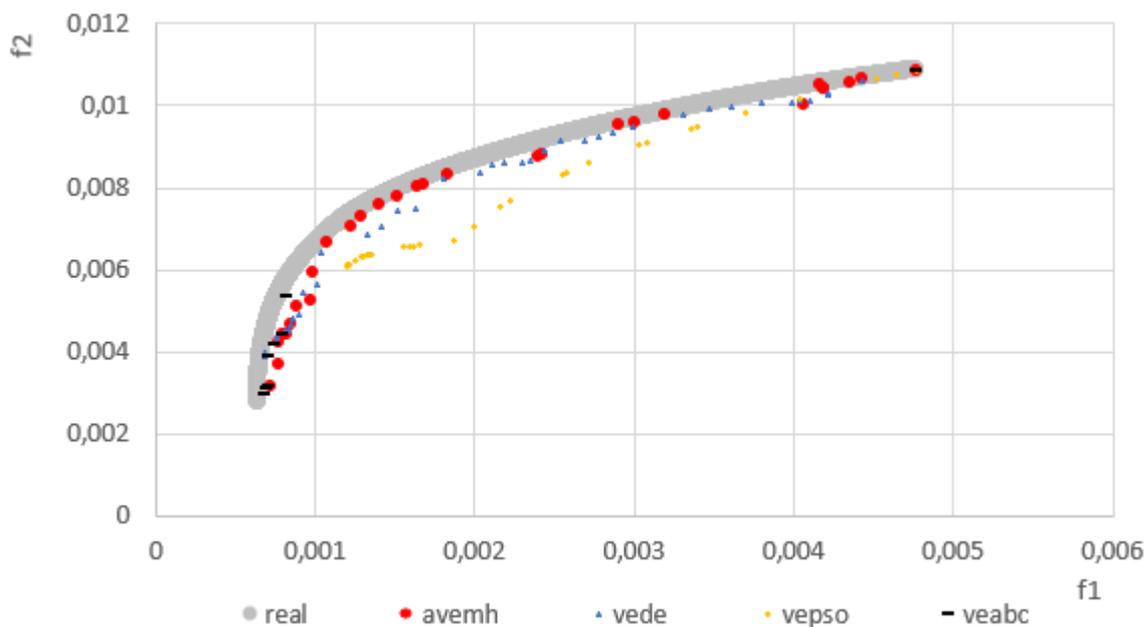
{0,01; 0; 0; 0,01; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0,01; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0,03; 0; 0,01; 0,88; 0; 0} 1
{0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0,02; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0,94; 0; 0} 1
{0,01; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,95; 0; 0} 1
{0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0,97; 0; 0} 1
{0,01; 0,01; 0; 0; 0,79; 0; 0; 0; 0,03; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0,02; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0,01; 0,1; 0,01; 0; 0} 1
{0,01; 0; 0; 0,01; 0,81; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0,01; 0; 0,01; 0,01; 0,01; 0; 0,08; 0,01; 0; 0,01; 0; 0} 1
{0,01; 0; 0; 0; 0,88; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0,02; 0; 0; 0,01; 0; 0,01; 0,05; 0,01; 0} 1
{0,01; 0; 0; 0; 0,87; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0,1; 0; 0} 1
{0,01; 0,01; 0; 0,01; 0,89; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,06; 0; 0} 1
{0,01; 0; 0; 0; 0,93; 0; 0; 0,02; 0; 0,02; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,02; 0; 0} 1
{0,01; 0; 0; 0; 0,94; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,02; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0; 0; 0; 0} 1
{0,01; 0; 0; 0; 0,94; 0,01; 0; 0,01; 0,02; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,01; 0; 0} 1
{0,03; 0; 0; 0; 0,97; 0} 1

---

Fonte: Dados gerados neste trabalho

Também é apresentado graficamente um comparativo entre o AVEMH e as heurísticas VE estáticas mostrado nas figuras 19, 20, 21, 22 e 23 com intuito de visualizar a disposição dos indivíduos do AVEMH em relação à curva ótima esperada quando dá resolução dos problemas da Seleção de Portfólios. Nestes conjuntos de dados foram utilizados 2000 gerações.

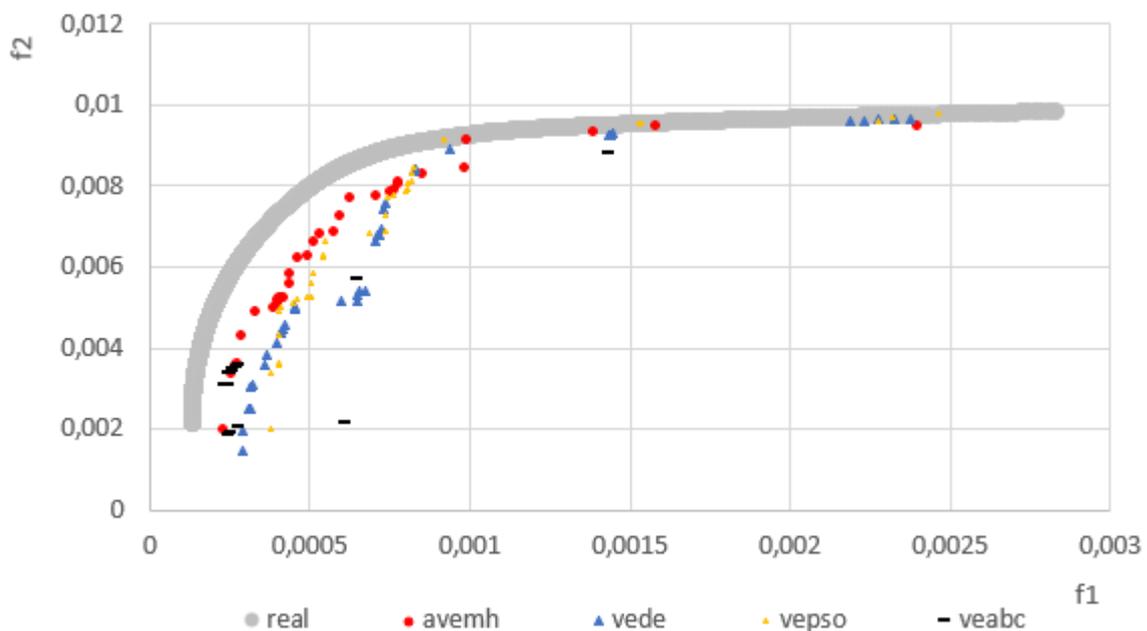
Figura 19 – Comparativo do AVEMH em relação às heurísticas estáticas na resolução dos problemas da Seleção de Portfólios - Conjunto Hong Kong Hang Seng.



(a) Hong Kong Hang Seng

Fonte: Dados gerados neste trabalho

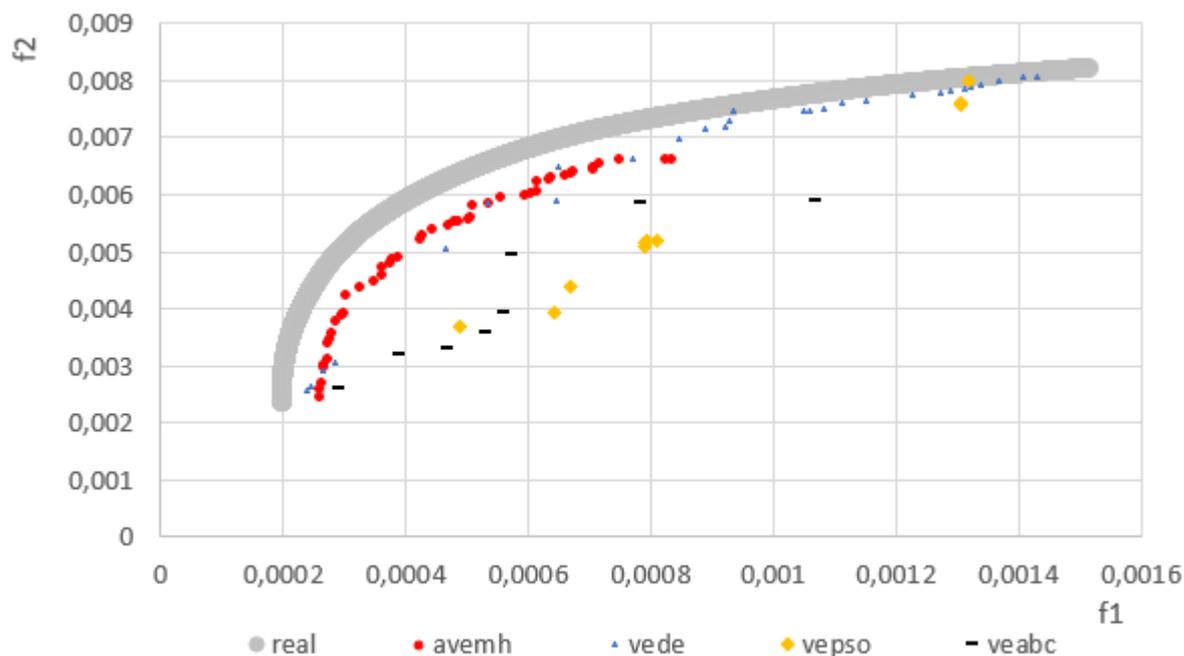
Figura 20 – Comparativo do AVEMH em relação às heurísticas estáticas na resolução dos problemas da Seleção de Portfólios - Conjunto German Dax 100.



(a) German Dax 100

Fonte: Dados gerados neste trabalho

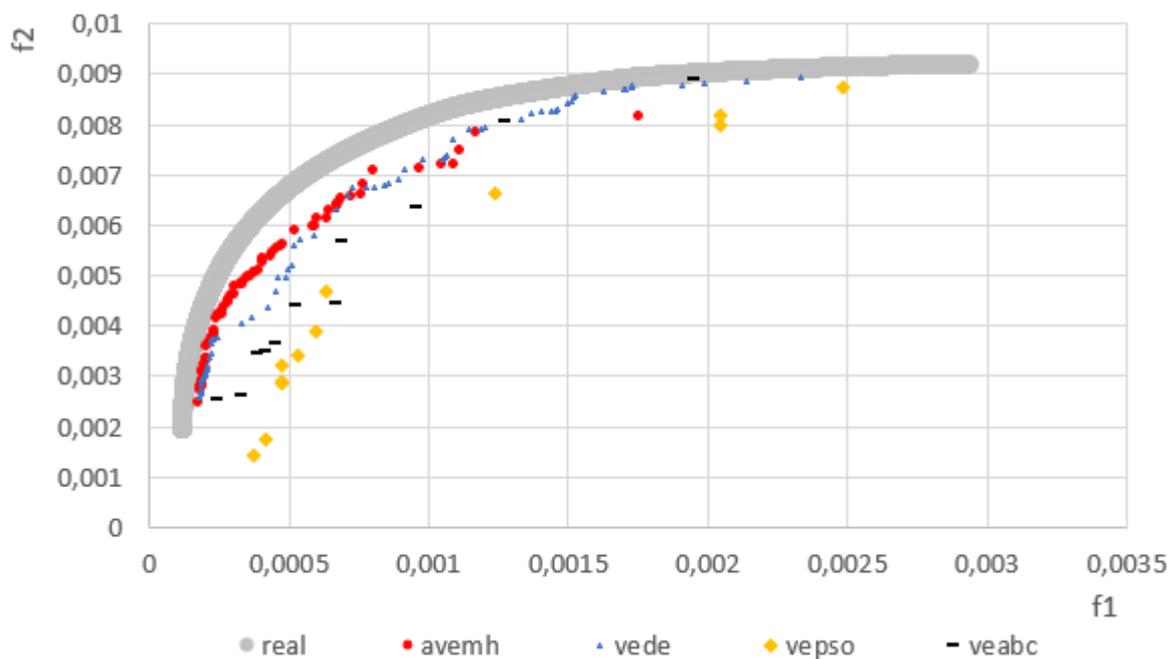
Figura 21 – Comparativo do AVMH em relação às heurísticas estáticas na resolução dos problemas da Seleção de Portfólios - Conjunto British FTSE 100.



(a) British FTSE 100

Fonte: Dados gerados neste trabalho

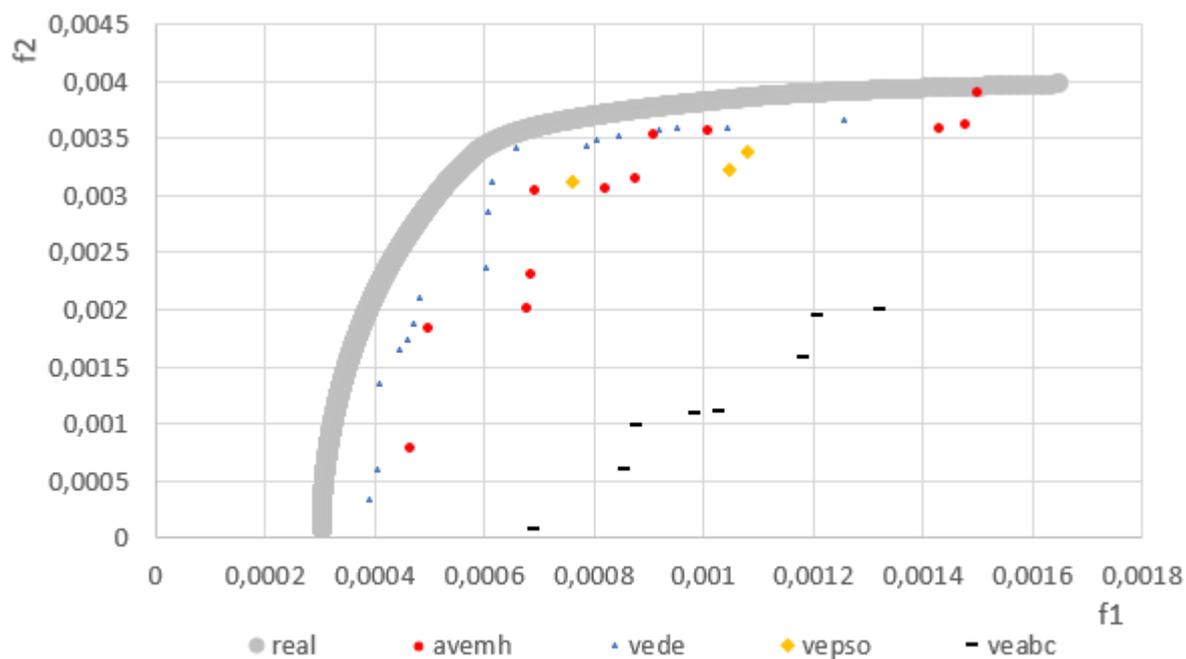
Figura 22 – Comparativo do AVMH em relação às heurísticas estáticas na resolução dos problemas da Seleção de Portfólios - Conjunto US S&P 100.



(a) US S&P 100

Fonte: Dados gerados neste trabalho

Figura 23 – Comparativo do AVEMH em relação às heurísticas estáticas na resolução dos problemas da Seleção de Portfólios - Conjunto Japanese Nikkei.



(a) Japanese Nikkei

Fonte: Dados gerados neste trabalho

Estes conjuntos de dados foram utilizados para apresentar graficamente a disposição dos indivíduos calculados em cada VE estático e a metaheurística vetorial adaptativa - AVEMH quando da resolução dos problemas da Seleção de Portfólios.

## 5 Conclusão e Trabalhos Futuros

Este capítulo conclui o trabalho através da descrição sobre as características gerais do AVEMH, a modelagem adotada para a resolução do problema do mundo real proposto, as contribuições deste trabalho, os melhores resultados atingidos pelo AVEMH nos experimentos realizados e as recomendações para os trabalhos futuros.

### 5.1 Conclusões

O modelo desenvolvido neste trabalho foi denominado AVEMH. O AVEMH é uma meta-heurística que utiliza as ideias de abordagens vetoriais para a resolução de MOP's. Nas abordagens vetoriais duas populações são utilizadas para a troca de informações entre si. Cada população lida individualmente com uma função de um MOP, ditas:  $f_1$  e  $f_2$ . Algumas abordagens como a do primeiro algoritmo vetorial, o VEGA, apresentou problemas em relação à rápida perda de diversidade; já a proposta seguinte, o MOGA, resolveu a questão da diversidade com a introdução da análise de dominância. A partir disso vários outros surgiram, por exemplo, o PSO com uma implementação vetorial denominada VEPSO em que dois exames são utilizados para resolver MOP's de dois objetivos.

No AVEMH três algoritmos são utilizados, conhecidos como VEPSO, VEABC e VEDE. A escolha de qual algoritmo deva interferir na população é feita através de uma escolha estocástica. A probabilidade inicial de cada algoritmo é 1/3, em percentual este valor é de 33,33%.

De forma genérica, no AVEMH a primeira população (*Pop1*) deve enviar seu melhor indivíduo para a próxima população (*Pop2*) e vice-versa. Este indivíduo enviado pela *Pop1* deverá ser o melhor na população em que chega. O indivíduo considerado 'o melhor' pode ter sido atualizado pelo VEPSO, ser a melhor fonte de comida no VEABC

ou ter sido gerado pela VEDE. Neste trabalho, a nomenclatura utilizada para se referir ao melhor indivíduo é sempre *pBest*.

No decorrer das gerações o algoritmo responsável pelo indivíduo '*pBest*' que se sobressair como 'o melhor' para a melhoria da segunda população é recompensado pelo aumento de sua probabilidade, frente à diminuição da probabilidade dos demais. No caso contrário, quando o '*pBest*' não for aceito pela população em que chega o algoritmo que o enviou é penalizado com a diminuição de sua probabilidade, frente ao aumento das probabilidade dos demais.

Ao serem percorridas todas as gerações predeterminadas os indivíduos considerados 'não dominados' da *Pop1* e os indivíduos considerados 'não dominados' da *Pop2* são unidos configurando um nova população denominada *PopFinal*. Para os indivíduos que compõe a *PopFinal* é verificada a qualidade referente à  $f_2$  dos indivíduos que vieram da *Pop1* e a qualidade referente à  $f_1$  para os indivíduos que vieram da *Pop2*. Por fim, são verificados os indivíduos da *PopFinal* que conseguem atingir os dois objetivos simultaneamente, gerando o conjunto final dos indivíduos 'não dominados'. A métrica utilizada para verificar a qualidade atingida pelo conjunto de 'não dominados' é o hipervolume.

Para a resolução do problema do mundo real, denominado Seleção de Portfólio, descrito na seção 2.3 foi utilizado o modelo Média-Variância apresentado na Equação 2.11 para a definição de retorno e risco do portfólio. Este modelo foi proposto por Markowitz (1952) . Neste modelo os genes representam a porcentagem que se deseja investir em determinado ativo; um indivíduo é uma carteira com o menor valor de risco associado; e a *PopFinal* é a representação do conjunto de todas as melhores carteiras, caracterizando o conjunto denominado 'Conjunto de Ótimos Pareto'. A análise de qual carteira, dentre o conjunto ótimo, um investidor deverá escolher está diretamente relacionada com o risco que ele está disposto a correr.

## 5.2 Contribuições

O AVEMH foi capaz de resolver o problema proposto como mostra os resultados dos testes apresentados nas Tabelas 11, 12, 15, 16. De forma geral, fazendo-se uma análise sobre todos os resultados atingidos pelo AVEMH, aponta-se os melhores na lista que segue:

- **Resolução dos benchmark Zdt's:** O AVEMH alcança melhores resultados nas ZDT1, ZDT2 e ZDT3. O VEABC encontra o melhor hipervolume na ZDT4 e o VEDE o melhor resultado na ZDT5, muito embora todos os valores sejam muito parecidos.

A partir da aplicação de um teste de variância (ANOVA) foi possível concluir que existem diferenças estatisticamente significativas entre as médias dos hipervolumes observados gerados no AVEMH, VEPSO, VEABC e VEDE para os problemas Zdt's. Com o teste de Tukey foram sinalizadas as diferenças encontradas, concluindo que o AVEMH é melhor na resolução do ZDT1, ZDT2 e ZDT3.

- **Resolução do problema da Seleção de Portfólios:** O AVEMH apresenta melhores resultados na resolução do HSI, DAX e FSTE; Já o VEDE apresentou melhores resultados quando da resolução do S&P 100 e Nikkei 225.

A partir da aplicação do teste de variância (ANOVA) foi possível concluir que existem diferenças estatisticamente significativas entre as médias dos hipervolumes observados gerados no AVEMH, VEPSO, VEABC e VEDE para a Seleção de Portfólios. Com o teste de Tukey foram sinalizadas as diferenças encontradas, concluindo que o AVEMH é melhor na resolução do HSI, DAX e FSTE.

A contribuição deste trabalho está na resolução do problema da seleção de portfólio através da utilização de uma nova meta-heurística baseada em modelo vetorial com características de auto-adaptação utilizando-se a interação entre o *VEPSO*, o *VEABC* e a *VEDE* para a resolução do problema em questão.

### 5.3 Limitações e Trabalhos Futuros

Apesar dos bons resultados atingidos pelo AVEMH, muito trabalho ainda precisa ser realizado. Como opções para trabalhos futuros pode-se citar:

- as meta-heurísticas apresentam um paralelismo inerente que pode ser explorado para melhorar a precisão da solução e para diminuir o tempo de execução do AVEMH, este trabalho pode ser aplicado em vários modelos de paralelismo;
- é possível aplicação do AVEMH em outras teorias de Seleção de Portfólio, uma vez que existem outras teorias além da Moderna teoria de Markowitz que foi explorada neste trabalho, e que mesmo quando baseadas nesta teoria apresentam modificações que podem apresentar melhores resultados. Como exemplo, pode-se citar: o modelo Minimax (YOUNG, 1998) e outras métricas de risco como o VaR, CVaR (SAMARAKOON; HASAN, 2005);
- é possível a aplicação deste modelo sobre outras bases de dados, como por exemplo, dados oriundos do ibovespa que é o maior índice de investimento da bolsa de valores brasileira (HANAOKA; CARDOSO; PAIVA, 2016);
- é possível a melhoria deste modelo através da utilização de novas métricas para avaliar os resultados atingidos, tais como a distância geracional e a métrica *spread*;
- pode-se desejar criar um novo método, baseado na lógica *fuzzy* para a tomada de decisão sobre qual é o melhor indivíduo da população ou ainda para dá suporte à escolha da melhor heurística para ser executada, dentre *VEPSO*, *VEABC*, *VEDE*;
- outra possibilidade é a utilização de uma rede neural ou uma deep learning para auxiliar na classificação de indivíduos como, por exemplo, os indivíduos 'não dominados';

- e por fim, pode-se avaliar os resultados do AVEMH com outros algoritmos multiobjetivos a partir de métricas que ofereçam uma comparação justa entre os modelos.

Espera-se que este trabalho sirva como base para pesquisas futuras sobre a aplicação de Algoritmos Evolutivos Vetoriais Multiobjetivos a outros problemas relacionados à seleção de portfólios.

# Referências

ARCE, P. E. B. *Aplicação da Teoria do Portfólio para Otimização de Carteiras de Contratos de Energia Elétrica e Gestão de Risco*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 52.

BANSAL, J. C.; PAL, N. R. Swarm and evolutionary computation. (parte de livro). In: \_\_\_\_\_. *Evolutionary and Swarm Intelligence Algorithms*. Cham: Springer International Publishing, 2019. p. 1–9. ISBN 978-3-319-91341-4. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-3-319-91341-4\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-91341-4_1)>. Citado na página 41.

BARBOSA, E. *A origem das palavras*. (Livro). [S.l.]: <https://books.google.com.br/books>., 2010. Citado na página 38.

BENTLEY, P. An introduction to evolutionary design by computers. (artigo). *Evolutionary Design by Computers*, 01 1999. Citado na página 39.

BITTENCOURT, G. *Inteligência Artificial – Ferramentas e Teorias*. (Livro). [S.l.]: Editora da UFSC., 1996. 362 p. Citado na página 40.

BORGES, H. P.; CORTES, O. A. C.; VIEIRA, D. An adaptive metaheuristic for unconstrained multimodal numerical optimization. (artigo de conferência). In: KOROŠEC, P.; MELAB, N.; TALBI, E.-G. (Ed.). *Bioinspired Optimization Methods and Their Applications*. Cham: Springer International Publishing, 2018. p. 26–37. ISBN 978-3-319-91641-5. Citado na página 24.

BRADSTREET, L. *The hypervolume indicator for multiobjective optimisation: calculation and use*. 47 p. Tese (Doutorado) — The University of Western Australia, 04 2011. Citado na página 38.

CARVALHO, E. et al. A parallel adaptive genetic algorithm for unconstrained multimodal numerical optimization. (artigo). *XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 10 2017. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 24.

CARVALHO, E. et al. A stochastic adaptive genetic algorithm for solving unconstrained multimodal numerical problems. (artigo de conferência). In: *2016 IEEE Conference on Evolving and Adaptive Intelligent Systems (EAIS)*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 130–137. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 24.

CHEN YANGBIN LIN, W. Z. H. X. D. Z. B. The mean-variance cardinality constrained portfolio optimization problem using a local search-based multi-objective evolutionary algorithm. (artigo). *Spring Science Business Media New York*, p. 20, 04 2017. Citado 3 vezes nas páginas 21, 23 e 24.

CHENG, S.; SHI, Y.; QIN, Q. On the performance metrics of multiobjective optimization. (artigo de conferência). In: *Lecture Notes in Computer Science*. [S.l.: s.n.], 2012. v. 7331, p. 504–512. Citado na página 37.

CLERC, M. *Standard Particle Swarm Optimisation. (Relatório Técnico)*. [S.l.], 2012. 15 pages. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00764996>>. Citado na página 63.

COCHRAN, J. K.; S. min H.; FOWLER, J. W. A multi-population genetic algorithm to solve multi-objective scheduling problems for parallel machines. (artigo). *Computers & Operations Research*, v. 30, p. 1087–1102, 2003. Citado na página 44.

COELLO, C.; BECERRA, R. Evolutionary multiobjective optimization using a cultural algorithm. (artigo de conferência). In: *2003 IEEE Swarm Intelligence Symposium, SIS 2003 - Proceedings*. [S.l.: s.n.], 2003. p. 6 – 13. ISBN 0-7803-7914-4. Citado na página 44.

COELLO, C. A. C.; PULIDO, G. T. A micro-genetic algorithm for multiobjective optimization. (artigo de conferência). In: *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO'2001)*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2001. p. 126–140. Citado na página 43.

COELLO, C. C.; G. T. P.; LECHUGA, M. S. Handling multiple objectives with particle swarm optimization. (artigo). *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, v. 8, p. 256 – 279, 07 2004. Citado na página 44.

CORNE, D. W.; J. D. K.; OATES, M. J. The pareto envelope-based selection algorithm for multiobjective optimization. (artigo de conferência). In: *Proceedings of the Parallel Problem Solving from Nature VI Conference*. [S.l.]: Springer, 2000. p. 839–848. Citado na página 43.

CORNE, D. W. et al. Pesa-ii: Region-based selection in evolutionary multiobjective optimization. (artigo de conferência). In: *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO'2001)*. [S.l.]: Morgan Kaufmann Publishers, 2001. p. 283–290. Citado na página 44.

CORTES, O. A. C.; P. F. do P.; RAU-CHAPLIN, A. A new vector evaluated pbil algorithm for reinsurance analytics. (artigo de conferência). In: *2015 Latin America Congress on Computational Intelligence (LA-CCI)*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 1–6. Citado 3 vezes nas páginas 19, 44 e 63.

CORTES, O. C.; RAU-CHAPLIN, A.; PRADO, P. F. D. On vepso and vede for solving a treaty optimization problem. (artigo de conferência). In: *IEEE International Conference on System, Man, and Cybernetics*. [S.l.: s.n.], 2014. Citado na página 20.

COSTA, J. P. A.; CORTES, O. A. C.; JÚNIOR, E. de C. R. An adaptative algorithm for updating populations on spea2. (artigo). *XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - Porto Alegre - RS*, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

COSTAL, G. Z.; MEIRA, L. A. Criptomoedas: moedas, ativo financeiro ou uma nova tulipa?. (artigo). *Economic Analysis of Law Review*, v. 8, 2017. Citado na página 53.

CRAINIC, T. G.; TOULOUSE, M. Parallel strategies for meta-heuristics. (capítulo de livro). In: \_\_\_\_\_. *Handbook of MetaHeuristics*. New York: Kluwer Academic Publishers, 2003. p. 475–513. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 39.

DEB, K. *Multi-Objective Optimization using Evolucionay Algorithm. (Livro)*. [S.l.]: Jhon Wiley & Sons, LTD, 2001. ISBN 0-471-87339-X. Citado 6 vezes nas páginas 19, 29, 30, 31, 41 e 42.

DEB, K. et al. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: Nsga-ii. (artigo). Springer, p. 849–858, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 43.

DEB, K. et al. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: Nsga-ii. (artigo). 2002. Citado na página 42.

Deb, K. et al. Scalable multi-objective optimization test problems. (artigo de conferência). In: *Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation. CEC'02 (Cat. No.02TH8600)*. [S.l.: s.n.], 2002. v. 1, p. 825–830 vol.1. Citado na página 42.

DHIMAN, G.; KUMAR, V. Spotted hyena optimizer: A novel bio-inspired based metaheuristic technique for engineering applications. (artigo). *Advances in Engineering Software*, v. 114, p. 48 – 70, 2017. ISSN 0965-9978. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0965997816305567>>. Citado na página 44.

DHIMAN, G.; KUMAR, V. Multi-objective spotted hyena optimizer: A multi-objective optimization algorithm for engineering problems. (artigo). *Knowledge-Based Systems*, v. 150, p. 175 – 197, 2018. ISSN 0950-7051. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0950705118301357>>. Citado 3 vezes nas páginas 21, 44 e 45.

DISFORD. *Top 30 companies of Germany in the DAX index 2019. (Artigo de Site)*. 2019. Disponível em: <<https://disfold.com/top-companies-germany-dax/>>. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 100.

DISFORD. *Top 30 companies of the UK in the FTSE index 2019. (Artigo de Site)*. 2019. Disponível em: <<https://disfold.com/top-companies-uk-ftse/>>. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 101.

D.KARABOGA; BASTURK, B. On the performance of artificial bee colony (abc) algorithm. (artigo). *Elsevier - Applied Soft Computing*, v. 8, p. 687–697, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 48.

ERICKSON, M.; A. M.; HORN, J. The niched pareto genetic algorithm 2 applied to the design of groundwater remediation systems. (artigo de conferência). In: *Proceedings of the First International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. London, UK, UK: Springer-Verlag, 2001. (EMO '01), p. 681–695. ISBN 3-540-41745-1. Disponível em: <<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=647889.739267>>. Citado na página 43.

ETH. *Systems Optimization. (Site)*. 2018. Disponível em: <<https://sop.tik.ee.ethz.ch/download/supplementary/testproblems>>. Citado 3 vezes nas páginas 33, 34 e 38.

FARIAS, M. S. R. *Algoritmos Evolucionários Aplicados ao Problema do Caixeiro Viajante Multiobjetivo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Alagoas, 2008. Citado na página 30.

FERNANDES, K. C. C. *Técnicas de otimização multiobjetivo e otimização estocástica para o roteamento de fluxos em redes*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal De Goiás - INSTITUTO DE INFORMÁTICA, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 45.

FOGEL, D. B. *Evolutionary Computation: Toward a New Philosophy of Machine Intelligence*. (Livro). [S.l.: s.n.], 2006. Citado na página 40.

FOGEL, L. J. *Intelligence Through Simulated Evolution: Forty Years of Evolutionary Programming*. (Livro). New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1999. ISBN 0-471-33250-X. Citado na página 41.

FONSECA, C. M.; FLEMING, P. J. Genetic algorithms for multiobjective optimization: Formulation, discussion and generalization. (artigo). 1993. Citado 3 vezes nas páginas 19, 42 e 43.

FONSECA, C. M. et al. *Computation of the Hypervolume Indicator (Artigo de Site)*. 2017. Disponível em: <<http://lopez-ibanez.eu/hypervolume>>. Citado na página 38.

GABRIEL, P.; MELO, V.; DELBEM, A. Evolutionary algorithms and hp model for protein structure prediction. (artigo). *SBA: Controle e Automação - Sociedade Brasileira de Automação*, v. 23, p. 25–37, 02 2012. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 42.

GABRIEL, P. H. R.; DELBEM, A. C. B. *Fundamentos de algoritmos evolutivos*. (Livro). [S.l.]: ICMC-USP, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.

GROSAN, C.; OLTEAN, M.; DUMITRESCU, D. Performance metrics for multiobjective optimization evolutionary algorithms. (artigo de conferência). In: *Latin American Computing Conference (CLEI)*. [S.l.: s.n.], 2003. Citado na página 37.

HAJELA; LIN. Genetic search strategies in multicriterion optimal design. (artigo). *Structural Optimization*, v. 4, 1992. Citado na página 43.

HANAOKA, G.; CARDOSO, R.; PAIVA, F. Modelo multiobjetivo para seleção de portfólios com restrição de cardinalidade, custo de transação e valor em risco condicional. (artigo). *TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, v. 17, n. 3, p. 353, 2016. ISSN 2179-8451. Disponível em: <<https://tema.sbmac.org.br/tema/article/view/905>>. Citado na página 81.

HOLLAND, J. *Adaptation in natural and articial systems*. (Livro). [S.l.: s.n.], 1992. Citado na página 40.

HONGYUN, M.; SANYANG, L. Ispea: improvement for the strength pareto evolutionary algorithm for multiobjective optimization with immunity. (artigo de conferência). In: *Proceedings Fifth International Conference on Computational Intelligence and Multimedia Applications. ICCIMA 2003*. [S.l.: s.n.], 2003. p. 368–372. Citado na página 44.

HORN, J.; N. N.; GOLDBERG, D. E. A niched pareto genetic algorithm for multiobjective optimization. (artigo). In: *IN PROCEEDINGS OF THE FIRST IEEE CONFERENCE ON EVOLUTIONARY COMPUTATION, IEEE WORLD CONGRESS ON COMPUTATIONAL INTELLIGENCE*. [S.l.: s.n.], 1994. p. 82–87. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.

- INDICES, S. D. J. *S&P 100. (Artigo de Site)*. 2019. Disponível em: <<https://us.spindices.com/indices/equity/sp-100>>. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 102.
- INVESTING.COM. *Nikkei 225 Componentes. (Artigo de Site)*. 2019. Disponível em: <<https://br.investing.com/indices/japan-ni225-components>>. Citado na página 104.
- IQUIAPAZA, R. A.; AMARAL, H. F.; BRESSAN, A. A. Evolução da pesquisa em finanças: Epistemologia, paradigma e críticas. (artigo de conferência). In: *Organização e Sociedade*. [S.l.: s.n.], 2009. v. 16, p. 351–370. Citado na página 52.
- KARABOGA, D.; BASTURK, B. A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: Artificial bee colony (abc) algorithm. (artigo). *J. of Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Hingham, MA, USA, v. 39, n. 3, p. 459–471, nov 2007. ISSN 0925-5001. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10898-007-9149-x>>. Citado 4 vezes nas páginas 16, 46, 47 e 48.
- KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. (artigo de conferência). In: *Neural Networks, 1995. Proceedings., IEEE International Conference on*. [S.l.: s.n.], 1995. v. 4, p. 1942–1948 vol.4. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 45.
- KIM, M. et al. Spea2+: Improving the performance of the strength pareto evolutionary algorithm 2. (artigo de conferência). In: *Lecture Notes in Computer Science, Vol. 3242 (Proc. of PPSN VIII)*. [S.l.]: Springer, 2004. p. 742–751. Citado na página 44.
- KITA, H. et al. Multi-objective optimization by means of the thermodynamical genetic algorithm. (artigo de conferência). In: *Proceedings of the 4th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature*. London, UK, UK: Springer-Verlag, 1996. (PPSN IV), p. 504–512. ISBN 3-540-61723-X. Disponível em: <<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=645823.670833>>. Citado na página 43.
- KNOWLES, J. *ParEGO: A Hybrid Algorithm With On-Line Landscape Approximation for Expensive Multiobjective Optimization Problems. (Relatório Técnico)*. [S.l.], 2004. Citado na página 44.
- KNOWLES, J.; CORNE, D. The pareto archived evolution strategy: A new baseline algorithm for pareto multiobjective optimisation. (artigo de conferência). In: *Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation, CEC 1999*. [S.l.: s.n.], 1999. v. 1. Citado na página 43.
- KNOWLES, J. D.; CORNE, D. W. Approximating the nondominated front using the pareto archived evolution strategy. (artigo). *EVOLUTIONARY COMPUTATION*, v. 8, n. 2, p. 149–172, 2000. Citado na página 42.
- KNOWLES, J. D.; CORNE, D. W. M-paes : a memetic algorithm for multiobjective optimization. (artigo de conferência). In: *In Proceedings of the 2000 congress on evolutionary computation*. [S.l.: s.n.], 2000. p. 325–332. Citado na página 43.
- KUNKLE, D. *A summary and comparison of MOEA algorithms. (Relatório Técnico)*. [S.l.], 2005. Disponível em: <[https://scholar.google.com.br/scholar?q=A+summary+and+comparison+of+MOEA+algorithms&hl=pt-BR&as\\_sdt=0&as\\_vis=1&oi=scholar](https://scholar.google.com.br/scholar?q=A+summary+and+comparison+of+MOEA+algorithms&hl=pt-BR&as_sdt=0&as_vis=1&oi=scholar)>. Citado na página 44.

- LAUMANN, M.; H.-P. S.; RUDOLPH, G. A spatial predator-prey approach to multi-objective optimization: A preliminary study. (artigo de conferência). In: *PROCEEDINGS OF THE PARALLEL PROBLEM SOLVING FROM NATURE*. [S.l.]: Springer, 1998. p. 241–249. Citado na página 43.
- LINDEN, R. *Algoritmos Genéticos - Uma importante ferramenta da inteligência computacional*. (Livro). [S.l.: s.n.], 2008. 308-316 p. ISBN 978-85-7452-373-6. Citado na página 31.
- LINDEN, R. *Algoritmos Genéticos - Uma importante ferramenta da inteligência computacional*. (Livro). [S.l.: s.n.], 2008. ISBN 978-85-7452-373-6. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 40.
- MANHEIM, D. C.; DETWILER, R. L. Accurate and reliable estimation of kinetic parameters for environmental engineering applications: A global, multi objective, bayesian optimization approach. (artigo). *MethodsX*, v. 6, p. 1398 – 1414, 2019. ISSN 2215-0161. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2215016119301554>>. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 45.
- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. (artigo). *The Journal of Finance*., v. 7, p. 77–91, mar. 1952. Citado 4 vezes nas páginas 26, 51, 53 e 79.
- MARKOWITZ, H.; SHARPE, W. F.; MILLER, M. H. The founders of modern finance: Their prize winning concepts and 1990 nobel lectures. (artigo). *CFA Intitute*, Charlottesville, Va, USA, 1990. Citado na página 51.
- MARTINO, J. A. de. *Algoritmos evolutivos como método para desenvolvimento de projetos de arquitetura*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Unicamp, Campinas - São Paulo, Brasil, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 21, 40, 41 e 42.
- MICHALEWICZ, Z. *Genetic Algorithms Data Structures Evolution Programs*. (Livro). (3rd Ed.). London, UK, UK: Springer-Verlag, 1996. ISBN 3-540-60676-9. Citado na página 49.
- MIRJALILI, S. Z. et al. Grasshopper optimization algorithm for multi-objective optimization problems. (artigo). *Applied Intelligence*, 08 2017. Citado na página 44.
- NAVARRO, P. L. K. G. *Computação Evolutiva Aplicada a Problemas Inversos com Preservação da Espacialidade na Representação dos Indivíduos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina - Programa De Pós Graduação em Engenharia Elétrica, 2000. Citado na página 41.
- NIKKEI Stock Average (Nikkei 225). (Artigo de Site). Nikkei 225 Official Site, 2019. Disponível em: <<https://indexes.nikkei.co.jp/en/nkave/index/profile?idx=nk225>>. Citado na página 36.
- NITISIRI, K.; GEN, M.; OHWADA, H. A parallel multi-objective genetic algorithm with learning based mutation for railway scheduling. (artigo). *Computers and Industrial Engineering*, v. 130, p. 381 – 394, 2019. ISSN 0360-8352. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360835219301214>>. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 45.

OMKAR, S. N. et al. Artificial bee colony (abc) for multi-objective design optimization of composite structures. (artigo). *Appl. Soft Comput.*, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v. 11, n. 1, p. 489–499, jan. 2011. ISSN 1568-4946. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.asoc.2009.12.008>>. Citado 4 vezes nas páginas 19, 22, 24 e 44.

PARSOPOULOS, K. E. et al. Vector evaluated differential evolution for multiobjective optimization. (artigo de conferência). In: *In Proceedings of the 2004 Congress on Evolutionary Computation (CEC 2004)*. [S.l.: s.n.], 2004. p. 204–211. Citado 4 vezes nas páginas 19, 22, 24 e 44.

PARSOPOULOS, K. E.; VRAHATIS, M. N. Particle swarm optimization method in multiobjective problems. (artigo de conferência). In: *In Proceedings of the 2002 ACM Symposium on Applied Computing (SAC 2002)*. [S.l.]: ACM Press, 2002. p. 603–607. Citado 4 vezes nas páginas 19, 22, 24 e 44.

PEREIRA, M. S. *Predição Do Consumo De Energia Elétrica Em Sistemas Job Shop Utilizando Técnicas De Aprendizado De Máquina*. Dissertação (Mestrado) — Centro Universitário da FEI, São Bernardo do Campo - São Paulo, Brasil, 2019. Citado na página 40.

PULIDO, G. T.; COELLO, C. The micro genetic algorithm 2: Towards online adaptation in evolutionary multiobjective optimization. (artigo de conferência). In: *Evolutionary Multi-Criterion Optimization: Second International Conference EMO*. [S.l.: s.n.], 2003. v. 2632, p. 252–266. Citado na página 44.

QU, B. et al. A survey on multi-objective evolutionary algorithms for the solution of the environmental/economic dispatch problems. (artigo). *Swarm and Evolutionary Computation*, v. 38, p. 1 – 11, 2018. ISSN 2210-6502. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2210650216301493>>. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 45.

QU, B. Y. et al. Large-scale portfolio optimization using multiobjective evolutionary algorithms and preselection methods. (artigo). *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2017, p. 1–14, 02 2017. Citado 5 vezes nas páginas 21, 23, 24, 26 e 51.

RECHENBERG, I.; TOMS, B.; ESTABLISHMENT, R. A. *Cybernetic Solution Path of an Experimental Problem*. (Livro). Ministry of Aviation, 1965. (Library translation / Royal Aircraft Establishment). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=FaWrtAEACAAJ>>. Citado na página 40.

REIS, T. *Como funciona a NASDAQ, a bolsa especializada em empresas de tecnologia*. (Artigo de Site). 2019. Disponível em: <<https://www.sunoresearch.com.br/artigos/nasdaq/>>. Citado na página 103.

REIS, T. *Hang Seng: saiba mais sobre o principal índice da Bolsa de Hong Kong*. (Artigo de Site). Fonte: Suno Research, 2019. Disponível em: <<https://www.sunoresearch.com.br/artigos/hang-seng/>>. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 99.

REIS, T. *Riscos financeiros: entenda a importância de conhecê-los*. (Artigo de Site). Fonte: Suno Research, 2019. Disponível em: <<https://www.sunoresearch.com.br/artigos/riscos-financeiros/>>. Citado na página 53.

RIBEIRO, M. C. de C. R.; ALVES, A. da S. O problema de seleção de portfólio de projetos de pesquisa em instituições de ensino: um estudo de caso. (artigo). *Gestão e Produção*, São Paulo, 2015. Citado na página 26.

RUDOLPH, G. On a multi-objective evolutionary algorithm and its convergence to the pareto set. (artigo de conferência). In: *In Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Evolutionary Computation*. [S.l.]: IEEE Press, 1998. p. 511–516. Citado na página 43.

SAMARAKOON, L. P.; HASAN, T. Portfolio performance evaluation. (parte de livro). In: \_\_\_\_\_. [S.l.]: THE ENCYCLOPEDIA OF FINANCE, C.F. Lee, Editor, Springer, 2005. p. 617–622. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=1508764>. Citado na página 81.

SANTOS, C. D. dos. Gestão de portfólio: Critérios de seleção de projetos em uma organização com foco em projetos esportivos. (artigo). XXXVII Encontro da ANPAD, Rio de Janeiro, 2013. Citado na página 26.

SCHAFFER, J. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms. (artigo de conferência). In: *Proceedings of the First Int. Conference on Genetic Algorithms*, Ed. G.J.E Grefensette, J.J. Lawrence Erlbaum. [S.l.: s.n.], 1985. p. 93–100. Citado na página 19.

SCHAFFER, J. D. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms. (artigo). *Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms and Their Applications, 1985*, Lawrence Erlbaum Associates. Inc., Publishers, 1985. Disponível em: <<https://ci.nii.ac.jp/naid/80002748210/en/>>. Citado na página 43.

SCHWEFEL, H.-P. *Evolutionsstrategien für die numerische Optimierung*. Tese (Doutorado) — Technical University of Berlin, 01 1975. Citado na página 40.

SRINIVAS, N.; DEB, K. Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms. (artigo). *Evolutionary Computation*, v. 2, p. 221–248, 1994. Citado na página 43.

STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution: A simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces. (artigo de congresso). v. 23, 01 1995. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 49.

TOPAZ, C. et al. A model for rolling swarms of locusts. (artigo). *The European Physical Journal Special Topics*, v. 157, 03 2007. Citado na página 44.

VELDHUIZEN, D. A. V.; LAMONT, G. Multiobjective optimization with messy genetic algorithms. (artigo). 01 2000. Citado na página 43.

VELDHUIZEN, D. A. V.; LAMONT, G. B. Multiobjective evolutionary algorithms: Analyzing the state-of-the-art. (artigo). *Evol. Comput.*, MIT Press, Cambridge, MA, USA, v. 8, n. 2, p. 125–147, jun. 2000. ISSN 1063-6560. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1162/106365600568158>>. Citado na página 43.

YEVSEYEVA, I. et al. A portfolio optimization approach to selection in multiobjective evolutionary algorithms. (artigo de conferência). In: BARTZ-BEIELSTEIN, T. et al. (Ed.). *Parallel Problem Solving from Nature – PPSN XIII*. Cham: Springer International

Publishing, 2014. p. 672–681. ISBN 978-3-319-10762-2. Citado 3 vezes nas páginas 21, 51 e 53.

YOUNG, M. R. A minimax portfolio selection rule with linear programming solution. (artigo). *Management Science*, INFORMS, v. 44, n. 5, p. 673–683, 1998. ISSN 00251909, 15265501. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2634472>>. Citado na página 81.

Zhang, Q.; Li, H. Moea/d: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. (artigo). *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, v. 11, n. 6, p. 712–731, Dec 2007. ISSN 1089-778X. Citado na página 44.

Zhang, W.; Fujimura, S. Improved vector evaluated genetic algorithm with archive for solving multiobjective pps problem. (artigo de conferência). In: *2010 International Conference on E-Product E-Service and E-Entertainment*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 1–4. Citado na página 26.

ZHU, G.; KWONG, S. Gbest-guided artificial bee colony algorithm for numerical function optimization. (artigo). *Applied Mathematics and Computation*, v. 217, n. 7, p. 3166 – 3173, 2010. ISSN 0096-3003. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300310009136>>. Citado na página 48.

ZIN, E. T. R. A. Como o pequeno investidor pode usar as teorias de graham e markowitz. (artigo). *Revista Científica do Alto Vale do Itajaí*, v. 4, 05 2016. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 53.

ZITZLER, E. Evolutionary algorithms for multiobjective optimization: Methods and applications. (artigo). 1999. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 42.

ZITZLER, E.; M. L.; THIELE, L. *SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm*. (Relatório Técnico). [S.l.], 2001. Citado 3 vezes nas páginas 19, 23 e 44.

ZITZLER, E.; DEB, K.; THIELE, L. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results. (artigo). *Evolutionary Computation, Volume 8, Issue 2*, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 26, 32 e 33.

ZITZLER, E.; THIELE, L. An evolutionary algorithm for multiobjective optimization: The strength pareto approach. (artigo). 1998. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.

ZITZLER, E.; THIELE, L. Multiobjective optimization using evolutionary algorithms — a comparative case study. (artigo de conferência). In: EIBEN, A. E. et al. (Ed.). *Parallel Problem Solving from Nature — PPSN V*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1998. p. 292–301. ISBN 978-3-540-49672-4. Citado na página 38.

# Apêndices

# APÊNDICE A – Apresentação de Parte dos Códigos Desenvolvidos do AVEMH

## A.1 A Escolha das Heurísticas

```
1  /**
2  * Escolha da heurística que será executada
3  *
4  * @param ‘probabilidades’ que representa o vetor mantido com as
5  *   probabilidades de cada heurística utilizada
6  *
7  * Caso resultado seja 0, a heurística escolhida é o PSO;
8  * Caso resultado seja 1, a heurística escolhida é o ABC;
9  * Caso resultado seja 2, a heurística escolhida é o DE;
10 */
11 int resultado = 0;
12 public EscolhaHeur(double[] probabilidades){
13     double sorteado = new Random().nextDouble();
14     if(sorteado < probabilidades[0])
15         resultado = 0;
16     else if(sorteado >= probabilidades[0] && sorteado < (
17         probabilidades[0] + probabilidades[1]))
18         resultado = 1;
19     else resultado = 2;
20 }
```

## A.2 Execução da Heurística Escolhida - Subpopulação1

```
1  /**
2  *Execução da heurística escolhida para a subpopulação1
3  * @param 'h1.getEscolhaHeur()' representando a heurística que foi
   escolhida
4  *
5  */
6  switch(h1.getEscolhaHeur()){
7      case PSO:
8          Pso pso = new Pso(subPop1, numeroIntercoes, esp, problema,
9              0, inercia, R1, R2);
10         pso.setIndividuoMigrado(melhor_pop2);
11         pso.execute();
12         MelhorCandPop1 = pso.getMelhorIndividuo(subPop1, 1);
13         break;
14     case ABC:
15         Abc abc = new Abc(subPop1, numeroIntercoes, esp, problema,
16             0, sobrevivem);
17         abc.setIndividuoMigrado(melhor_pop2);
18         abc.executar();
19         MelhorCandPop1 = abc.getMelhorIndividuo(subPop1, 1);
20         break;
21     default:
22         De de = new De(subPop1, numeroIntercoes, esp, problema, 0,
23             taxaCrossover, taxaMutacao);
24         de.setIndividuoMigrado(melhor_pop2);
25         de.executar();
26         MelhorCandPop1 = de.getMelhorIndividuo(subPop1, 1);
27         break;
28 }
29 //Da mesma forma é feita para a subpopulação2
```

### A.3 Avaliação de Aceitação do Melhor Indivíduo Candidato

```
1  /**
2  *Avaliação para verificar se o indivíduo candidato será o melhor
   na subpopulação em que chega
3  * @param ‘subPop1’ subpopulação1 atualizada por uma das três heu-
   rísticas
4  * @param ‘MelhorCandPop2’ indivíduo candidato a ser o ‘melhor’
   para a próxima subpopulação
5  * @param ‘melhor_pop1’ melhor indivíduo já consolidado da
   subpopulação1
6  *
7  *Caso o indivíduo candidato seja aceito como o ‘melhor’ na popula-
   ção em que chega então a heurística que o enviou será
   recompensada; caso contrário, ela será penalizada.
8  */
9  if(Avaliacao.MelhorInd(subPop1, MelhorCandPop2, melhor_pop1) ||
   Avaliacao.Media(pop1, subPop1, 1)){
10     r1.recompensa(h2.getEscolhaHeur(), FATOR);
11     melhor_pop1 = MelhorCandPop2;
12 }else{
13     r1.penaliza(h2.getEscolhaHeur(), FATOR);
14 }
15 //Da mesma forma é feita para a subpopulação2
```

## A.4 Avaliação da população pelo Melhor Indivíduo

```

1  /**
2  *Método estático que avalia a nova população a partir de seu melhor
   indivíduo. Neste caso é considerado o melhor o indivíduo que
   atende como melhor na população para a qual será enviado.
3  *
4  * @param ‘pop’ população da qual sairá o melhor indivíduo
5  * @param ‘i’ indivíduo enviado - candidato a ser o melhor indiví
   duo da população que chega esta chegando
6  * @param ‘i_’ melhor indivíduo consolidado da população para a
   qual o candidato sera enviado
7  *
8  * @return boolean, caso o candidato seja melhor que o melhor indiví
   duo consolidado da população retorna true; caso contrário,
   retorna false
9  */
10 public static boolean MelhorInd(Populacao pop, Indivíduo i,
   Indivíduo i_){
11     boolean sinal = false;
12     pop.getProblema().qualidadeIndividuo_(i, pop);
13     if(pop.getProblema().isMaximizacao(pop.getFuncao())){
14         if( (i.getQualidades2() > i_.getQualidades2()) && (i.
   getQualidades2() > 0)){
15             sinal = true;
16         }
17     }else{
18         if( (i.getQualidades1() < i_.getQualidades1()) && (i.
   getQualidades1() > 0)){
19             sinal = true;
20         }
21     }
22     return sinal;
23 }

```

# Anexos

## ANEXO A – Publicações 2019

Como parte das exigências do programa deve-se enviar o trabalho realizado para uma conferência ou revista pelo menos B4. Este trabalho gerou a produção de um artigo denominado ‘Uma Nova Meta-heurística Adaptativa Baseada em Vetor de Avaliações para Otimização de Portfólios de Investimentos’ enviado para a revista <<http://journal.iberamia.org/index.php/~intartif/about/submissions>>. O qualis desta revista é B2. O layout da revista pode ser observado na figura 24.

O artigo foi publicado no Vol 22 No 64 (2019), páginas 85-101, disponível no DOI <<https://doi.org/10.4114/intartif.vol22iss64>>.

Figura 24 – Publicações: journal Iberamia



Fonte: Layout disponível pelo site do journal Iberamia

## ANEXO B – Composição do Índice 'Hong Kong Hang Seng'

As principais empresas negociadas na Bolsa de Hong Kong são as seguintes ([REIS, 2019b](#)):

- HSBC Holdings;
- Hang Seng Bank;
- AIA Group;
- CK Hutchison Holdings;
- Hong Kong Exchanges and Clearing;
- Sun Hung Kai Properties;
- Cheung Kong Property Holdings;
- CLP Holdings;
- Hong Kong and China Gas;
- Power Assets Holdings.

Totalizando 10 empresas com ações em diversas áreas.

## ANEXO C – Composição do Índice 'German DAX'

As principais empresas negociadas na Bolsa de Valores de Frankfurt são as seguintes (DISFORD, 2019a):

- ThyssenKrupp;
- Covestro;
- Lufthansa;
- Merck;
- Wirecard;
- HeidelbergCement;
- RWE;
- Deutsche Bank;
- Deutsche Börse;
- E.ON;
- Fresenius Medical Care;
- Infineon Technologies;
- Vonovia;
- Beiersdorf;
- Fresenius;
- Continental;
- Munich Re;
- Henkel;
- Deutsche Post;
- Adidas;
- BMW;
- Bayer;
- Daimler;
- BASF;
- Deutsche Telekom;
- Volkswagen;
- Siemens;
- Allianz;
- Linde;
- SAP;

Totalizando 30 empresas com ações em diversas áreas.

## ANEXO D – Composição do Índice 'British FTSE'

As principais empresas negociadas na Bolsa de Valores de Londres são as seguintes (DISFORD, 2019b):

- Smith & Nephew
- BAE Systems
- Associated British Foods
- Imperial Brands
- Standard Chartered
- Tesco
- CRH
- Royal Bank of Scotland Group
- Experian
- Anglo American
- The London Stock Exchange Group
- Barclays
- National Grid
- Glencore
- Compass Group
- Lloyds Banking Group
- Prudential
- BHP Group
- RELX Group
- Vodafone Group
- Reckitt Benckiser Group
- Rio Tinto
- Unilever
- British American Tobacco
- Diageo
- GlaxoSmithKline
- AstraZeneca
- BP
- HSBC Holdings
- Royal Dutch Shell

Totalizando 30 empresas com ações em diversas áreas.

# ANEXO E – Composição do Índice ‘US S&P 100’

As principais empresas negociadas na Bolsa de Valores de Nova York, NYSE e NASDAQ, são as seguintes ([INDICES, 2019](#)):

- Apple Inc
- AbbVie Inc.
- Abbott Laboratories
- Accenture
- Adobe Inc.
- Allergan
- American International Group
- Allstate
- Amgen Inc.
- Amazon.com
- American Express
- Boeing Co.
- Bank of America Corp
- Biogen
- The Bank of New York Mellon
- Booking Holdings
- BlackRock Inc
- Bristol-Myers Squibb
- Berkshire Hathaway
- Citigroup Inc
- Caterpillar Inc.
- Celgene Corp
- Charter Communications
- Colgate-Palmolive
- Comcast Corp.
- Capital One Financial Corp.
- ConocoPhillips
- Costco Wholesale Corp.
- Cisco Systems
- CVS Health
- Chevron Corporation
- DuPont de Nemours Inc
- Danaher Corporation
- The Walt Disney Company
- Dow Inc.
- Duke Energy
- Emerson Electric Co.
- Exelon
- Ford Motor Company
- Facebook
- FedEx
- General Dynamics
- General Electric
- Gilead Sciences
- General Motors
- Alphabet Inc. (Class A e C)
- Goldman Sachs
- Home Depot
- Honeywell

- International Business Machines (IBM)
- Intel Corp.
- Johnson & Johnson
- JPMorgan Chase & Co.
- Kraft Heinz
- Kinder Morgan
- The Coca-Cola Company
- Eli Lilly and Company
- Lockheed Martin
- Lowe's
- MasterCard Inc
- McDonald's Corp
- Mondelez International
- Medtronic plc
- MetLife Inc.
- 3M Company
- Altria Group
- Merck & Co.
- Morgan Stanley
- Microsoft
- NextEra Energy
- Netflix
- Nike, Inc.
- NVIDIA Corp.
- Oracle Corporation
- Occidental Petroleum Corp.
- PepsiCo
- Pfizer Inc
- Procter & Gamble Co
- Philip Morris International
- PayPal Holdings
- Qualcomm Inc.
- Raytheon Co.
- Starbucks Corp.
- Schlumberger
- Southern Company
- Simon Property Group, Inc.
- AT&T Inc
- Target Corporation
- Texas Instruments
- UnitedHealth Group
- Union Pacific Corporation
- United Parcel Service
- U.S. Bancorp
- United Technologies
- Visa Inc.
- Verizon Communications
- Walgreens Boots Alliance
- Wells Fargo
- Walmart
- Exxon Mobil Corp

Totalizando 101 empresas. Sendo que 1 (uma) está no índice com duas classes diferentes. A NYSE é o principal mercado de valores mobiliários do mundo. A NASDAQ é especializada principalmente em grandes empresas do setor de tecnologia, sendo que suas operações sempre foram realizadas de forma eletrônica e automática (REIS, 2019a).

## ANEXO F – Composição do Índice 'Nikkei 225'

Este índice é composto por empresas que atuam em diversos setores dos quais pode-se citar alimentação, vestuário, produtos químicos, petróleo e carvão, aço, metais não ferrosos, maquinaria eléctrica, indústria automobilística, Bancos, etc. As principais empresas negociadas na Bolsa de Valores de Tóquio são as seguintes ([INVESTING.COM](https://www.investing.com), 2019):

- Ajinomoto Co., Inc.
- Asahi Breweries, Ltd.
- Japan Tobacco Inc.
- Kikkoman Corp.
- Kirin Brewery Co., Ltd.
- Meiji Holdings Company, Limited
- Nichirei Corp.
- Nippon Meat Packers, Inc.
- Nisshin Seifun Group Inc.
- Sapporo Holdings Ltd.
- Takara Holdings Inc.
- Teijin Ltd.
- Toray Industries, Inc.
- Toyobo Co., Ltd.
- Unitika, Ltd.
- Nippon Paper Group, Inc.
- Oji Paper Co., Ltd.
- Asahi Kasei Corp.
- Denki Kagaku Kogyo K.K.
- Fujifilm Holdings Corp.
- Kao Corp.
- Kuraray Co., Ltd.
- Mitsubishi Chemical Holdings Corp.
- Mitsui Chemicals, Inc.
- Nippon Kayaku Co., Ltd.
- Nissan Chemical Industries, Ltd.
- Nitto Denko
- Shin-Etsu Chemical Co., Ltd.
- Shiseido Co., Ltd.
- Showa Denko K.K.
- Sumitomo Chemical Co., Ltd.
- Tokuyama Corporation
- Tosoh Corp.
- Ube Industries, Ltd.
- Astellas Pharma Inc.
- Chugai Pharmaceutical Co., Ltd.
- Daiichi Sankyo Co., Ltd.
- Dainippon Sumitomo Pharma Co., Ltd.
- Eisai Co., Ltd.
- Kyowa Hakko Kirin Co., Ltd.
- Otsuka Holdings Co., Ltd.
- Shionogi & Co., Ltd.
- Takeda Pharmaceutical Company, Ltd.
- JXTG Holdings

- Showa Shell Sekiyu K.K.
- Bridgestone Corp.
- The Yokohama Rubber Co., Ltd.
- Asahi Glass Co., Ltd.
- NGK Insulators, Ltd.
- Nippon Electric Glass Co., Ltd.
- Nippon Sheet Glass Co., Ltd.
- Sumitomo Osaka Cement Co., Ltd.
- Taiheiyo Cement Corp.
- Tokai Carbon Co., Ltd.
- Toto Ltd.
- JFE Holdings, Inc.
- Kobe Steel, Ltd.
- Nippon Steel Corp.
- Nisshin Steel Cp., Ltd.
- Pacific Metals Co., Ltd.
- Dowa Holdings Co., Ltd.
- Fujikura Ltd.
- Furukawa Co., Ltd.
- The Furukawa Electric Co., Ltd.
- Mitsubishi Materials Corp.
- Mitsui Mining & Smelting Co., Ltd.
- Nippon Light Metal Co., Ltd
- SUMCO Corp.
- Sumitomo Electric Industries, Ltd.
- Sumitomo Metal Mining Co., Ltd.
- Toho Zinc Co., Ltd.
- Toyo Seikan Kaisha, Ltd.
- Amada Corporation Ltd.
- Chiyoda Corporation
- Daikin Industries, Ltd.
- Ebara Corporation
- Hitachi Construction Machinery Co., Ltd.
- Hitachi Zosen Corporation
- IHI Corporation
- The Japan Steel Works, Ltd.
- JTEKT Corp.
- Komatsu Limited
- Kubota Corp.
- Mitsubishi Heavy Industries, Ltd.
- NSK Ltd.
- NTN Corporation
- Okuma Holdings, Inc.
- Sumitomo Heavy Industries, Ltd.
- Advantest Corp.
- Alps Electric Co., Ltd.
- Canon Inc.
- Casio Computer Co., Ltd.
- Dainippon Screen Mfg. Co., Ltd.
- Denso Corp.
- Fanuc Corporation
- Fuji Electric Holdings Co., Ltd.
- Fujitsu Ltd.
- GS Yuasa Corp.
- Hitachi, Ltd.
- Kyocera Corp.
- Panasonic Corp.
- Minebea Co., Ltd.
- Mitsubishi Electric Corp.
- Mitsumi Electric Co., Ltd.
- NEC Corp.

- Nisshinbo Holdings Inc.
- Oki Electric Industry Co., Ltd.
- Pioneer Corporation
- Ricoh
- Seiko Epson Corporation
- Sony Corp.
- Taiyo Yuden Co., Ltd.
- TDK Corp.
- Tokyo Electron Ltd.
- Yaskawa Electric Corporation, Ltd.
- Yokogawa Electric Corp.
- Kawasaki Heavy Industries, Ltd.
- Mitsui Engineering & Shipbuilding Co., Ltd.
- Hino Motors, Ltd.
- Honda Motor Co., Ltd.
- Isuzu Motors Ltd.
- Mazda Motor Corp.
- Mitsubishi Motors Corp.
- Nissan Motor Co., Ltd.
- Subaru Corp.
- Suzuki Motor Corp.
- Toyota Motor Corp.
- Yamaha Motor Corp.
- Citizen Holdings Co., Ltd.
- Konica Minolta Holdings, Inc.
- Nikon Corp.
- Olympus Corp.
- Terumo Corp.
- Dai Nippon Printing Co., Ltd.
- Toppan Printing Co., Ltd.
- Yamaha Corp.
- Nippon Suisan Kaisha, Ltd.
- Maruha Nichiro Holdings, Inc.
- Inpex Corp.
- Comsys Holdings Corp.
- Daiwa House Industry Co., Ltd.
- Haseko Corporation
- JGC Corporation
- Kajima Corp.
- Obayashi Corporation
- Sekisui House, Ltd.
- Shimizu Corp.
- Taisei Corp.
- Itochu Corp.
- Marubeni Corp.
- Mitsubishi Corp.
- Mitsui & Co., Ltd.
- Sojitz Corp.
- Sumitomo Corp.
- Toyota Tsusho Corp.
- Aeon Co., Ltd.
- FamilyMart Uny Holdings Co., Ltd.
- Fast Retailing Co., Ltd.
- Isetan Mitsukoshi Holdings Ltd.
- J. Front Retailing Co., Ltd.
- Marui Group Co., Ltd.
- Seven & I Holdings Co., Ltd.
- Takashimaya Co., Ltd.
- Aozora Bank, Ltd.
- The Chiba Bank, Ltd.
- Concordia Financial Group, Inc.

- Fukuoka Financial Group, Inc.
- Mitsubishi UFJ Financial Group, Inc.
- Mizuho Financial Group, Inc.
- Resona Holdings, Inc.
- Shinsei Bank, Ltd.
- The Shizuoka Bank, Ltd.
- Sumitomo Mitsui Financial Group, Inc.
- Sumitomo Mitsui Trust Holdings, Inc.
- Daiwa Securities Group Inc.
- Matsui Securities Co., Ltd.
- Nomura Holdings, Inc.
- Dai-ichi Life Insurance Company, Ltd
- MS&AD Insurance Group, Inc.
- Sampo Holdings Inc.
- Sony Financial Holdings Inc.
- T&D Holdings, Inc.
- Tokio Marine Holdings, Inc.
- Credit Saison Co., Ltd.
- Mitsubishi Estate Co., Ltd.
- Mitsui Fudosan Co.,Ltd
- Sumitomo Realty & Development Co., Ltd.
- Tokyo Tatemono Co., Ltd.
- Tokyu Land Corp.
- Central Japan Railway Company
- East Japan Railway Company
- Keio Corporation
- Keisei Electric Railway Co., Ltd.
- Odakyu Electric Railway Co., Ltd.
- Tobu Railway Co., Ltd.
- Tokyu Corporation
- West Japan Railway Company
- Nippon Express Co., Ltd.
- Yamato Holdings Co., Ltd.
- Kawasaki Kisen Kaisha, Ltd.
- Mitsui O.S.K. Line, Ltd.
- Nippon Yusen K.K.
- All Nippon Airways Co., Ltd.
- Mitsubishi Logistics Corp.
- KDDI Corp.
- Nippon Telegraph and Telephone Corp.
- NTT Data Corp.
- NTT DoCoMo, Inc.
- Sky Perfect JSAT Holdings Inc.
- SoftBank Corp.
- Chubu Electric Power Co., Inc.
- The TKansai Electric Power Co., Inc.
- The Tokyo Electric Power Co., Inc.
- Osaka Gas Co., Ltd.
- Tokyo Gas Co., Ltd.
- Dena Corporation, Ltd.
- Dentsu Inc.
- Japan Post Holdings Co., Ltd.
- Konami Corp.
- Rakuten Inc.
- Recruit Holdings Co., Ltd.
- Secom Co., Ltd.
- Tokyo Dome Corp.
- Toho Co., Ltd.
- Trend Micro Inc.
- Yahoo Japan Corp.